

CHAPITRE 0

Exemples et Contre-exemples

Exercice 0.1. On observe que pour quelques entiers naturels n , on a $n! < 2^n$. Peut-on dire que cette propriété est vraie pour tout n ?

Qu'en est-il de $n! < 3^n$?

Est-il vrai que $n! < 5^n$ pour tout entier naturel n ?

Exercice 0.2. La propriété

$$\frac{1}{n!} > \frac{8^n}{(2n)!}$$

est-elle vraie pour tout entier naturel n ?

Exercice 0.3. L'affirmation : "les diagonales d'un polygone sont toujours à l'intérieur du polygone" est-elle vraie ?

Exercice 0.4. Pour quelles valeurs de n a-t-on :

1.

$$\frac{1}{n} \leq 0,01$$

2.

$$0,49 \leq \frac{n+13}{2n+25} \leq 0,51$$

3.

$$2,5 \leq \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} \leq 4$$

Exercice 0.5. Considérons le polynôme $P(n) = n^2 - n + 5$.

— Vérifiez que pour les premières valeurs de n , $P(n)$ est premier.

— **Discutez** : un *grand* nombre d'exemples favorables suffirait-il à prouver que $P(n)$ est toujours premier ?

— Cherchez un entier n rendant $P(n)$ composé.

Reprendre ces questions avec $P(n) = n^2 - n + 11$, $P(n) = 2^{2^n} + 1$.

Est-il vrai que si p est un nombre premier, alors $2^p - 1$ est premier.

Exercice 0.6. On étudie la formule

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 \stackrel{?}{=} \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2.$$

- Calculez la somme pour $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ et comparez avec $\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.
- Ces quelques vérifications constituent-elles une démonstration ?
- Proposez, si possible, un **raisonnement** général (par récurrence ou par décomposition algébrique) pour prouver (ou infirmer) la formule.

Exercice 0.7. Considérons la suite définie par $a_n = n! + 1$.

- Calculez a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 . Certains de ces termes sont premiers.
- Peut-on affirmer que *tous* les termes de cette forme sont premiers ?
- Soit vous exhibez un terme qui n'est pas premier, soit vous tentez de prouver qu'ils le sont tous.

Exercice 0.8. Dans un pentagone convexe, on peut mesurer la somme de ses angles intérieurs. En traçant plusieurs pentagones à main levée, on trouve souvent approximativement 540° .

- Expliquez pourquoi on ne peut pas se contenter d'exemples tracés et mesurés pour conclure.
- Donnez un argument géométrique *global* prouvant que la valeur de la somme des angles d'un pentagone donne toujours 540° (indice : triangulez la figure).

Exercice 0.9. Dans un triangle ABC quelconque, on peut essayer de démontrer expérimentalement que les médianes se coupent en un même point G .

- Effectuez trois tracés différents d'un triangle et de ses médianes, constatez leur intersection.
- Montrez pourquoi la mesure ou l'observation graphique ne constitue pas une preuve.
- Proposez un argument géométrique global pour expliquer ce phénomène.

Exercice 0.10. Vrai ou faux, justifiez :

- " Tout entier positif pair plus grand qu'un certain seuil s'écrit comme somme de deux nombres dont l'un est multiple de 3."
- " $3^{2n} + 1$ est toujours divisible par 10."
- " Le nombre de diagonales d'un polygone à n côtés est $\frac{n(n-3)}{2}$."

Indications : Considérer d'abord le cas des polygones réguliers, convexes puis le cas général.

- " La somme de deux multiples de 4 est toujours un multiple de 8."
- " Tout quadrilatère convexe peut se paver entièrement avec un certain nombre de triangles identiques."

Exercice 0.11. Proposez vous-même un énoncé *nouveau* qui **semble** toujours vrai au vu de quelques cas, mais dont la validité générale n'est pas évidente.

- Donnez quelques exemples numériquement ou géométriquement.
- Invitez le lecteur à *soit* trouver un contre-exemple, *soit* fournir un raisonnement général.
- Concluez en rappelant l'importance de la preuve en mathématiques.

Exercice 0.12. On définit une fonction T ainsi :

$$T(n) = \begin{cases} \frac{n}{2}, & \text{si } n \text{ est pair,} \\ 3n + 1, & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

La **conjecture de Collatz** dit ceci : Pour tout entier $n > 1$, si on applique plusieurs fois T , la suite obtenue arrive toujours à 1, puis continue dans le cycle :

$$1 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow \dots$$