

CHAPITRE 1

Récurrance

Quelques définitions

La suite de Fibonacci

La suite de Fibonacci est définie de manière récurrente comme suit : $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ pour $n \geq 0$.

Elle commence par 0 puis 1, et chaque terme suivant est la somme des deux termes précédents : 0, 1, 1, 2, 3, 5, ...

Les coefficients binomiaux

Les coefficients binomiaux sont définis à partir du symbole $\binom{n}{k}$, qui représente le nombre de façons de choisir k éléments parmi n éléments, sans tenir compte de l'ordre. Ils sont donnés par la formule suivante :

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \quad \text{pour } 0 \leq k \leq n.$$

Les coefficients binomiaux apparaissent naturellement dans le développement du binôme de Newton :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

Exercices (simples) sur les nombres de Fibonacci

Exercice 1.1. Démontrer la formule de Binet pour les nombres de Fibonacci :

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}}, \quad \text{où } \alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \text{ et } \beta = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$

Indication : Utiliser la relation de récurrence $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.

Exercice 1.2. Montrer que les nombres de Fibonacci peuvent être exprimés sous forme combinatoire :

$$F_n = \binom{n-1}{0} + \binom{n-2}{1} + \binom{n-3}{2} + \cdots.$$

Indication : Étudier les coefficients binomiaux et la relation avec la définition des F_n .

Exercice 1.3. Prouver que la somme des carrés des n premiers nombres de Fibonacci est donnée par la relation :

$$\sum_{i=1}^n F_i^2 = F_n F_{n+1}.$$

Indication : Utiliser une démonstration par récurrence pour valider cette identité.

Exercice 1.4. Démontrer l'identité matricielle suivante pour les nombres de Fibonacci :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Indication : Utiliser la définition de la puissance matricielle et la relation de récurrence des nombres de Fibonacci.

Quelques exercices

Exercice 1.5. Soit α un nombre réel tel que $\alpha + \frac{1}{\alpha} \in \mathbb{Z}$.

1. Vérifiez que si $\alpha = 2 + \sqrt{3}$, alors $\alpha + \frac{1}{\alpha} = 4$.
2. En supposant que, pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq n$, on a $\alpha^k + \frac{1}{\alpha^k} \in \mathbb{Z}$, montrez que cela reste vrai pour $n+1$, c'est-à-dire que $\alpha^{n+1} + \frac{1}{\alpha^{n+1}} \in \mathbb{Z}$.
3. Concluez que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\alpha^n + \frac{1}{\alpha^n} \in \mathbb{Z}$.

Exercice 1.6. Le but de cet exercice est de montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, la somme suivante est comprise entre 1 et 2 :

$$S = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{3n+1}.$$

1. Déterminer, en fonction de n , le nombre de termes de cette somme.
2. Quel est le plus petit terme de cette somme ? et le plus grand ?
3. Montrez que $1 < S < 2$.

Exercice 1.7. On veut montrer que tous les nombres de la forme 1007, 10017, 100117, ... sont divisibles par 53.

1. Écrivez un terme général a_n pour décrire cette suite de nombres.
2. Quelle est la différence entre deux termes consécutifs de cette suite ?
3. Concluez que a_n est divisible par 53 pour tout $n \geq 1$.

Exercice 1.8. Soient x_1, x_2 les racines de l'équation $x^2 + px - 1 = 0$, où p est un entier impair. On définit $y_n = x_1^n + x_2^n$ pour tout $n \geq 0$. Montrer que y_n et y_{n+1} sont des entiers premiers entre eux.

1. Calculez y_0, y_1 , puis $\text{pgcd}(y_0, y_1)$.
2. Établissez la relation $y_{n+2} = -p y_{n+1} + y_n$.
3. Dédurre que $\text{pgcd}(y_n, y_{n+1}) = 1$ pour tout $n \geq 0$.

Exercice 1.9. On considère $2n$ points donnés dans l'espace, et $n^2 + 1$ segments de droite tracés entre ces points. Montrer qu'il existe au moins un ensemble de trois points qui sont reliés deux à deux par des segments de droite.

1. Expliquez pourquoi un graphe avec $2n$ sommets et sans triangle peut avoir au maximum n^2 arêtes.
2. En déduire qu'un graphe contenant $2n$ sommets et $n^2 + 1$ arêtes doit nécessairement contenir au moins un triangle.

Quelques problèmes

Problème 1.1. Montrez que pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons $f(n) = g(n)$, où

$$f(n) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n}, \quad g(n) = \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n}.$$

Problème 1.2. Montrez que $(n+1)(n+2) \cdots 2n = 2^n \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Problème 1.3. Montrez que 3^{n+1} divise $2^{3n} + 1$ pour tout entier $n \geq 0$.

Problème 1.4. Soit $n = 2^k$. Montrez qu'il est possible de sélectionner n entiers parmi $(2n-1)$ entiers de telle sorte que leur somme soit divisible par n .

Problème 1.5. Tous les nombres de la forme 12008, 120308, 1203308, ... sont divisibles par 19.

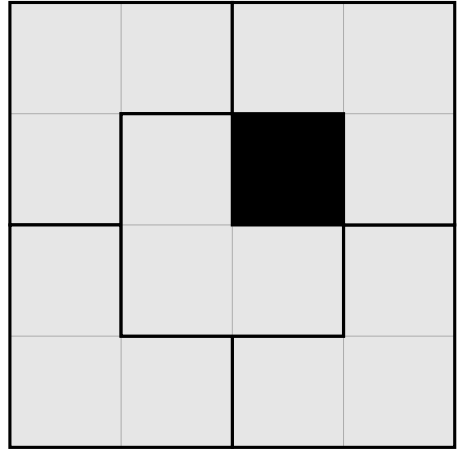
Problème 1.6. n cercles sont donnés dans le plan. Ils divisent le plan en plusieurs parties. Montrez qu'il est possible de colorier le plan avec deux couleurs de telle sorte qu'aucune partie ayant une frontière commune avec une autre ne soit coloriée de la même couleur. Une telle coloration est appelée une *coloration propre*.

Problème 1.7. Qu'est-ce qu'un tromino ?

Un **tromino** est une forme composée de trois carrés connectés par leurs côtés. Dans ce problème, nous considérons uniquement les trominos en forme de L , c'est-à-dire trois carrés formant un angle droit.

Qu'est-ce qu'un pavage ?

Un **pavage** consiste à recouvrir entièrement une surface avec des formes sans chevauchement ni espace vide. Ici, nous cherchons à recouvrir une grille carrée en utilisant uniquement des trominos.



On considère une grille carrée de taille $2^n \times 2^n$, où n est un entier positif. Un des carrés de cette grille est colorié en noir.

Question : Est-il possible de recouvrir tous les autres carrés de la grille avec des trominos en forme de L , sans chevauchement et sans laisser de case vide ?