

CHAPITRE 2

Principe Extrémal

2.1 Quelques principes

1. Tout sous-ensemble fini non-vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément et un plus grand élément.
2. Tout sous-ensemble non-vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément.
3. Soit A un ensemble fini de nombres réels.
 - Si A est majoré, alors il a un plus petit majorant mais pas nécessairement un plus grand élément.
 - Si A est minoré, alors il a un plus grand minorant mais pas nécessairement un plus petit élément.

2.2 Exercices

- Exercice 2.1.** 1. Prouver qu'il n'existe pas de couple d'entiers naturels positifs (x, y) tels que : $x^2 = 2y^2$.
2. En déduire que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Exercice 2.2 — E9. Prouver qu'il n'y a pas de quadruplets d'entiers naturels positifs (x, y, a, b) tels que :

$$x^2 + y^2 = 3(a^2 + b^2).$$

Exercice 2.3 — E3. Considérons n points du plan tels que tout triplet de points forme un triangle d'aire ≤ 1 . Montrer que les n points se trouvent dans un triangle d'aire ≤ 4 .

Exercice 2.4 — E10. Considérons n points du plan qui ne sont pas tous sur une même droite. Montrez qu'il existe une droite qui passe par seulement deux de ces points.

Exercice 2.5 — E5. Soit P un ensemble de points du plan. Tout point de P est le milieu de deux points de P . Montrer que P est un ensemble infini.

2.3 Problèmes

Problème 2.1 — 12. Il y a 20 pays sur une planète. Pour chaque groupe de trois pays, il y en a deux qui n'ont aucune relation diplomatique. Montrer qu'il y a au plus 200 ambassades sur cette planète.

Problème 2.2 — 23. Prenez trois points A_1, B_1, C_1 , respectivement sur les côtés AB, BC, CA d'un triangle ABC . Montrer que si $AA_1 \leq 1$, $BB_1 \leq 1$, $CC_1 \leq 1$, alors l'aire du triangle est $\leq \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Problème 2.3 — 21. Tout polygone convexe d'aire 1 est contenu dans un rectangle d'aire 2.

Problème 2.4 — 28. On choisit 8 points dans un disque de rayon 1. Montrer qu'il y a deux points distants d'au plus 1.

Problème 2.5 — 32. Déterminer toutes les solutions positives du système d'équations :

$$x_1 + x_2 = x_3^2, \quad x_2 + x_3 = x_4^2, \quad x_3 + x_4 = x_5^2, \quad x_4 + x_5 = x_1^2, \quad x_5 + x_1 = x_2^2.$$