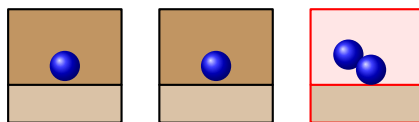


CHAPITRE 3

Principe des Tiroirs

Le principe en quelques mots

Si vous placez $n + 1$ objets dans n tiroirs, alors au moins un tiroir contiendra plus d'un objet.



Quelques exercices simples

Exercice 3.1. Deux personnes du même sexe Parmi trois personnes, il y en a forcément deux du même sexe.

Exercice 3.2. Anniversaires Parmi 13 personnes, il y en a au moins deux qui sont nées le même mois.

Exercice 3.3. Cheveux sur la tête Personne n'a plus de 300 000 cheveux sur la tête. Une ville possède 300 001 habitants. Peut-on affirmer avec certitude qu'au moins deux personnes ont le même nombre de cheveux sur la tête ?

Exercice 3.4. Anniversaires multiples Combien de personnes doit-on réunir pour être certain que :

- Deux personnes ont le même anniversaire ?
- Trois personnes ont le même anniversaire ?
- q personnes ont le même anniversaire ?

Exercice 3.5. Perles dans des boîtes Si $qS + 1$ perles sont placées dans S boîtes, alors au moins une boîte contient plus de q perles.

Exercice 3.6. Ligne dans un triangle Une ligne ℓ dans le plan du triangle ABC ne passe par aucun sommet. Prouver qu'elle ne peut pas couper les trois côtés du triangle.

Exercice 3.7. Intersection d'un tétraèdre Un plan ne passe pas par un sommet d'un tétraèdre. Combien d'arêtes peut-il intercepter ?

Exercice 3.8. Trous sur une cible triangulaire Une cible a la forme d'un triangle équilatéral de côté 2.

- (a) Si elle est touchée 5 fois, alors il y aura deux trous avec une distance ≤ 1 .
- (b) Si elle est touchée 17 fois, quelle est la distance maximale possible entre les deux impacts les plus proches ?

Exercice 3.9. Période d'une fraction La représentation décimale de $\frac{a}{b}$, où a et b sont premiers entre eux, a une période d'au plus $b - 1$.

Exercice 3.10. Décimaux infinis Parmi 11 décimaux infinis, on peut sélectionner deux nombres a, b tels que leurs représentations décimales possèdent les mêmes chiffres à une infinité de positions correspondantes.

Exercice 3.11. Nombres à deux chiffres Parmi 12 nombres à deux chiffres distincts, on peut en sélectionner deux dont la différence est un nombre de deux chiffres de la forme aa .

Exercice 3.12. Divisibilité et coprimisme Si aucun des nombres $a, a + d, \dots, a + (n - 1)d$ n'est divisible par n , alors d et n sont premiers entre eux.

Quelques exercices

Exercice 3.13. Parmi $n + 1$ nombres choisis dans l'ensemble $\{1, 2, \dots, 2n\}$, il y en a au moins un qui divise un autre.

Exercice 3.14. Soient a et $b \in \mathbb{N}$ deux entiers premiers entre eux. Alors il existe des entiers naturels x et y tels que $ax - by = 1$.

Exercice 3.15. Vingt entiers positifs distincts deux à deux sont tous strictement inférieurs à 70. Montrer que parmi leurs différences deux à deux, il existe au moins quatre valeurs égales.

Exercice 3.16. Soit $P_1, P_2, \dots, P_9$ neuf points de l'espace à coordonnées entières, tels que jamais trois d'entre eux ne soient alignés. Prouver qu'il existe un point à coordonnées entières L situé sur un segment $P_i P_k$ pour $i \neq k$.

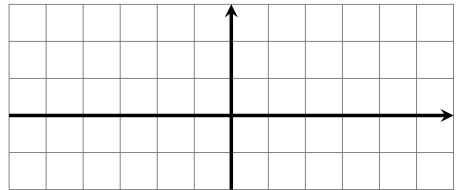
Exercice 3.17. Soit n un entier positif qui n'est divisible ni par 2 ni par 5. Montrer qu'il existe un multiple de n constitué uniquement de chiffres 1.

Exercice 3.18. Soient a, b, c et d des entiers. Montrer que le produit des différences $b - a, c - a, d - a, c - b, d - b$, et $d - c$ est divisible par 12.

Quelques problèmes simples

Problème 3.1. Cinq points dans une grille

Cinq points de la grille plane des coordonnées entières.) sont choisis. Prouvez que vous pouvez toujours en choisir deux tels que le segment reliant ces points passe par un autre point de la grille. (Les points de la grille sont ceux qui ont



Problème 3.2. Des gens dans une pièce Il y a n personnes dans une pièce. Montrez qu'il existe au moins deux personnes ayant le même nombre de connaissances dans la pièce.

Problème 3.3. Tournoi d'échecs Un joueur d'échecs a 77 jours pour se préparer à un tournoi. Il joue au moins une partie par jour, et au total pas plus de 132 parties. Montrez qu'il existe une suite de jours consécutifs pendant laquelle il joue exactement 21 parties.

Problème 3.4. Erdős et Szekeres Les entiers positifs de 1 à 101 sont écrits dans un ordre quelconque. Montrez que l'on peut supprimer 90 de ces nombres, de sorte qu'il reste une sous-suite strictement croissante ou décroissante.

Quelques problèmes

Problème 3.5. Supposons que a soit premier avec 2 et 5. Prouvez que, pour tout n , il existe une puissance de a se terminant par $\underbrace{000 \dots 01}_n$.

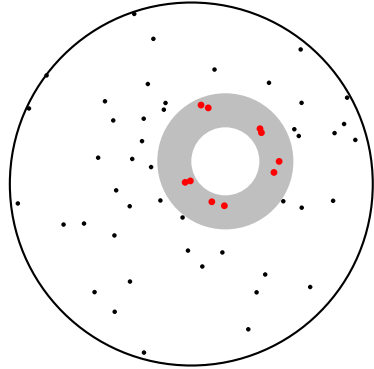
Problème 3.6. Parmi six personnes, il y en a toujours trois qui se connaissent mutuellement ou trois qui sont des étrangers complets.

Problème 3.7. Chacun des 17 scientifiques est en correspondance avec

tous les autres. Ils échangent uniquement sur trois sujets, et chaque paire de scientifiques correspond sur exactement un seul sujet. Montrer qu'il existe au moins trois scientifiques qui correspondent entre eux sur un même sujet.

Problème 3.8. Parmi dix nombres de deux chiffres distincts, on peut toujours choisir deux sous-ensembles non vides disjoints tels que la somme de leurs éléments soit la même.

Problème 3.9. On place 650 points à l'intérieur d'un cercle de rayon 16. Montrer qu'il existe une couronne (un anneau) de rayon intérieur 2 et de rayon extérieur 3 qui contient 10 de ces points.



Problème 3.10. On dispose de plusieurs cercles, d'une longueur totale égale à 10, placés à l'intérieur d'un carré de côté 1. Montrer qu'il existe une droite qui intersecte au moins quatre de ces cercles.

Problème 3.11. Une disque fermé de rayon 1 contient sept points, tels que la distance mutuelle entre tous les points est ≥ 1 . Prouvez que le centre du disque est l'un de ces sept points.

Problème 3.12. Parmi 70 entiers positifs ≤ 200 distincts, montrez que deux d'entre eux ont une différence égale à 4, 5 ou 9.