

CHAPITRE 4

Géométrie

Notions utiles

Vecteur : Un vecteur est défini par une direction, un sens et une norme (sa longueur). On note $\overrightarrow{AB}$ le vecteur :

- de direction (AB) ,
- de sens allant du point A au point B ,
- de longueur AB .

Milieu d'un segment : Le milieu du segment $[AB]$ est le point M tel que $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$. Ses coordonnées sont $\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}, \dots\right)$,

Centroïde (centre de gravité) : Le centroïde d'un ensemble de points est le point moyen de ces points. Pour n points $A_1, A_2, \dots, A_n$, le centroïde S vérifie :

$$\sum_{i=1}^n \overrightarrow{SA_i} = \vec{0}.$$

Parallélogramme : Un quadrilatère dont les côtés opposés sont parallèles et de même longueur. Ses diagonales se coupent en leur milieu.

Exercices

Exercice 4.1. Les milieux d'un quadrilatère Les milieux P, Q, R, S [des côtés] de tout quadrilatère dans le plan ou dans l'espace sont les sommets d'un parallélogramme.

Indication : Utilisez les expressions vectorielles des milieux et comparez les vecteurs opposés.

Exercice 4.2. Hexagone formé par les centroïdes Soit $ABCDEF$ un hexagone quelconque, et soit $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ l'hexagone formé par les centroïdes des triangles $ABC, BCD, CDE, DEF, EFA, FAB$. Alors l'hexagone $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ a des côtés opposés parallèles et de même longueur.

Indication : Représentez les centroïdes de chaque triangle et utilisez les propriétés des vecteurs et des translations.

Exercice 4.3. Centroïde de n points Trouver le centroïde S de n points

$A_1, \dots, A_n$, défini par l'égalité suivante :

$$\sum_{i=1}^n \overrightarrow{SA_i} = \vec{0}.$$

Indication : Exprimez chaque vecteur $\overrightarrow{SA_i}$ en fonction de S et des points A_i , puis simplifiez la somme vectorielle.

Exercice 4.4. Diagonales orthogonales Les diagonales d'un quadrilatère sont orthogonales si et seulement si ses médianes ont la même longueur.

Exercice 4.5. Relation vectorielle dans l'espace Soient A, B, C, D quatre points dans l'espace. On a toujours :

$$|AB|^2 + |CD|^2 - |BC|^2 - |AD|^2 = 2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB}.$$

Exercice 4.6. Dans un triangle dont tous les angles sont aigus ABC , soit H l'orthocentre et O le centre du cercle circonscrit. Prouvez que le quadrilatère $BHOC$ est un parallélogramme si et seulement si le triangle ABC est équilatéral.

Exercice 4.7. Dans un triangle ABC , soient AD et BE deux médianes, se coupant en G . Montrez que

$$AB^2 + BC^2 + CA^2 = 3(GD^2 + GE^2) + \frac{3}{4}(AB^2 + BC^2 + CA^2).$$

Exercice 4.8. Soit ABC un triangle isocèle avec $AB = AC$. Soit O le centre de son cercle circonscrit. Montrer que la symétrie de O par rapport à la bissectrice de l'angle $\angle A$ coïncide avec le milieu de BC .

Problèmes

Problème 4.1. Relation sur les diagonales Montrer que

$$|AC|^2 + |BD|^2 = |AB|^2 + |BC|^2 + |CD|^2 + |DA|^2 \iff A + C = B + D.$$

Problème 4.2. Théorème (rectangle dans l'espace) Soient A, B, C, D quatre points dans l'espace. Prouvez le théorème suivant :

Si, pour tout point X de l'espace, on a

$$|AX|^2 + |CX|^2 = |BX|^2 + |DX|^2,$$

alors $ABCD$ est un rectangle.

Problème 4.3. Théorème d'Euler Prouvez le théorème d'Euler : Dans un quadrilatère $ABCD$ avec les médianes MN et PQ ,

$$|AC|^2 + |BD|^2 = 2(|MN|^2 + |PQ|^2).$$

Problème 4.4. Produit scalaire dans un rectangle Si M est un point et $ABCD$ un rectangle, alors

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD}.$$

Problème 4.5. Somme de vecteurs bornés Soient n vecteurs $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ tels que $|\vec{a}_i| \leq 1$. Montrer que, dans la somme

$$\vec{c} = \pm \vec{a}_1 \pm \dots \pm \vec{a}_n,$$

on peut choisir les signes de manière à ce que $|\vec{c}| \leq \sqrt{2}$.

Problème 4.6. Triangles équilatéraux et centre de gravité Les triangles OAB et $OA'B'$ sont équilatéraux et de même orientation. S est le centre de gravité du triangle $\triangle OAB$, et M et N sont les milieux respectifs de $A'B$ et AB' . Montrer que

$$\triangle SMB' \sim \triangle SNA' \quad (\text{IMO Jury 1977}).$$

Problème 4.7. Dans le triangle acutangle ABC , soit O le centre du cercle circonscrit. Montrer que les droites de hauteurs (altitudes) et les bissectrices internes s'agencent de sorte que l'hexagone formé par leur intersection est inscrit dans un cercle centré en O .

Problème 4.8. Soit ABC un triangle avec $\angle B = 2\angle C$. Sur le segment $[AB]$, on choisit un point M tel que $\angle MCB = \angle A$. Démontrer que le cercle circonscrit de AMC passe par un point fixe indépendamment du choix de M .

Problème 4.9. Un quadrilatère convexe $ABCD$ est donné. Le point P est l'intersection des diagonales AC et BD . Les cercles circonscrits des triangles ABP et CDP se coupent au point $Q \neq P$. Prouvez que la droite PQ coupe AD et BC en leurs milieux respectifs.