

CHAPITRE 6

Combinatoire

6.1 Exemples introductifs

La combinatoire consiste à *compter sans énumérer un à un*. Les deux premiers outils sont le **principe additif** et le **principe multiplicatif**.

6.1.1 Les principes additif et multiplicatif

Principe additif. Lorsqu'un choix se fait *dans une catégorie ou dans une autre*, on additionne.

Exemple. À la sortie du lycée, Tiana peut acheter un gouter :

- un *koba* parmi 3 sortes ;
- ou un *mokary* parmi 2 sortes.

Combien de choix a-t-il ?

$$3 + 2 = 5.$$

Il y a donc $\boxed{5}$ choix possibles.

Principe multiplicatif. Lorsqu'un choix se fait en plusieurs étapes successives, on multiplie.

Exemple. Sur son chemin, il/elle peut composer son repas avec :

- un plat parmi 3 possibilités : *romazava*, *ravitoto*, *vary amin'anana* ;
- une boisson parmi 2 possibilités : eau ou jus.

Le nombre de repas possibles est

$$3 \times 2 = 6.$$

Il y a donc $\boxed{6}$ repas différents.

Première généralisation. Si une expérience se déroule en p étapes, et qu'il y a respectivement $n_1, n_2, \dots, n_p$ choix à chaque étape, alors le nombre total d'issues est

$$n_1 n_2 \cdots n_p.$$

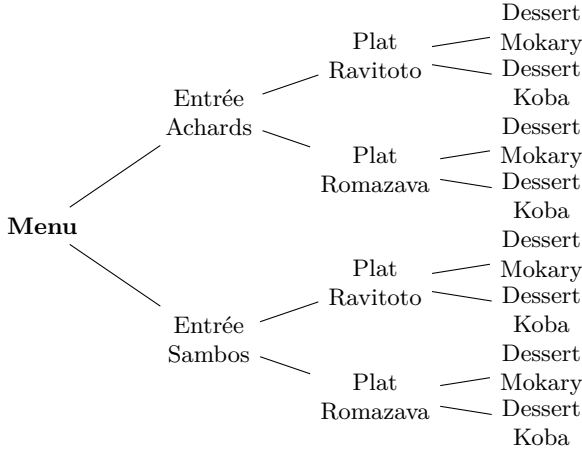
6.1.2 Le principe de l'arbre des choix

L'arbre des choix permet de visualiser un raisonnement multiplicatif.

Exemple : menu malgache. On choisit :

- une entrée : *sambos* ou *achards* ;
- un plat : *romazava* ou *ravitoto* ;
- un dessert : *koba* ou *mokary*.

Chaque menu correspond à un chemin dans l'arbre ci-dessous.



Comme il y a 2 choix pour l'entrée, 2 choix pour le plat et 2 choix pour le dessert, on obtient

$$2 \times 2 \times 2 = 8.$$

Il y a donc 8 menus possibles.

L'arbre sert surtout à *voir* les possibilités ; le calcul se fait ensuite par multiplication.

6.1.3 Le principe des codes : avec répétitions et sans répétitions

Codes avec répétition autorisée. On forme un code à 3 chiffres avec les symboles

$$0, 1, 2, 3.$$

Chaque position peut contenir n'importe lequel des 4 symboles.

Le nombre de codes est donc

$$4 \times 4 \times 4 = 4^3 = 64.$$

Il y a $\boxed{64}$ codes possibles.

Généralisation. Si un code a longueur p et si l'on dispose de n symboles, alors avec répétition autorisée, le nombre total de codes est

$$\boxed{n^p}.$$

Codes sans répétition. On reprend les symboles 0, 1, 2, 3, mais cette fois un symbole ne peut pas être utilisé deux fois.

- 4 choix pour le premier chiffre ;
- 3 choix pour le deuxième ;
- 2 choix pour le troisième.

Donc

$$4 \times 3 \times 2 = 24.$$

Il y a $\boxed{24}$ codes possibles.

Généralisation. Avec n symboles et un code de longueur p sans répétition (avec $p \leq n$), on obtient

$$\boxed{n(n-1)(n-2) \cdots (n-p+1)}.$$

Cette quantité apparaîtra plus tard sous le nom d'*arrangement*.

6.1.4 Choisir sans ordre et avec ordre

On termine par une distinction fondamentale : *l'ordre compte-t-il ou non ?*

Choix sans ordre

Exemple. Dans un *fokontany*, n habitants se portent volontaires pour représenter le quartier. On veut en choisir 2, sans attribuer de rôle particulier.

Ici, choisir $\{A, B\}$ revient au même que choisir $\{B, A\}$: **l'ordre ne compte pas**.

Si l'on comptait avec ordre, on aurait :

$$n(n-1)$$

possibilités, car :

- n choix pour la première personne ;

— $n - 1$ choix pour la deuxième.

Mais chaque paire a été comptée *deux fois* :

$$(A, B) \quad \text{et} \quad (B, A).$$

Donc le nombre de choix sans ordre est

$$\frac{n(n-1)}{2}.$$

On note souvent

$$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Exemple numérique. S'il y a $n = 5$ volontaires, alors

$$\binom{5}{2} = \frac{5 \times 4}{2} = 10.$$

Choix avec ordre

Exemple. Parmi n candidats, on veut choisir

- un *sefo fokontany* ;
- puis un adjoint.

Cette fois, les rôles sont différents : choisir A comme sefo et B comme adjoint n'est pas la même chose que choisir B comme sefo et A comme adjoint.

Le nombre de choix est donc

$$n(n-1).$$

Exemple numérique. Pour $n = 5$ candidats :

$$5 \times 4 = 20.$$

Il y a donc $\boxed{20}$ façons de choisir un sefo fokontany et un adjoint parmi 5 personnes.

6.1.5 À retenir

- **Principe additif** : si l'on choisit *ceci ou cela*, on additionne.
- **Principe multiplicatif** : si l'on choisit *ceci puis cela*, on multiplie.
- **Arbre des choix** : il permet de visualiser une situation de comptage.
- **Code avec répétition** : avec n symboles et p positions, on obtient n^p .
- **Code sans répétition** : on obtient $n(n-1) \cdots (n-p+1)$.
- **Choix sans ordre** : pour choisir 2 personnes parmi n , on obtient

$$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

- **Choix avec ordre** : pour deux rôles distincts, on obtient

$$n(n-1).$$

6.2 Factorielle et coefficients binomiaux

Dans cette section, on passe des exemples concrets aux premières formules générales de combinatoire.

6.2.1 Des choix successifs à la factorielle

Supposons que n personnes doivent se placer en file indienne.

- Il y a n choix pour la première place ;
- puis $n-1$ choix pour la deuxième ;
- puis $n-2$ choix pour la troisième ;
- etc. ;
- enfin 1 choix pour la dernière.

Le nombre total de files possibles est donc

$$n(n-1)(n-2) \cdots 2 \cdot 1.$$

On introduit alors la notation suivante :

$$n! = n(n-1)(n-2) \cdots 2 \cdot 1$$

On lit $n!$: n factorielle.

Par convention, on pose aussi

$$0! = 1.$$

Exemple 1. Avec 4 élèves, le nombre de façons de se ranger est

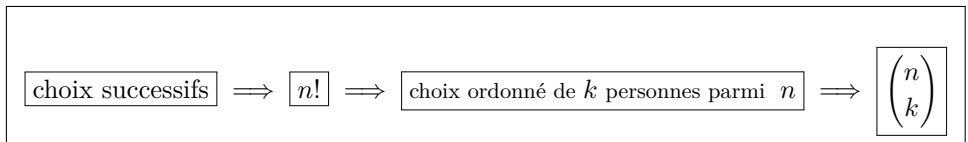
$$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24.$$

Exemple 2. Dans un *fokontany*, 5 personnes doivent occuper 5 rôles distincts (sefo, adjoint, secrétaire, trésorier, conseiller). Le nombre d'affectations possibles est

$$5! = 120.$$

6.2.2 Schéma d'ensemble

On peut résumer l'idée générale par le schéma suivant :



Autrement dit :

- quand on choisit *successivement* plusieurs personnes, on multiplie ;
- quand on choisit *toutes* les n personnes dans un ordre, on obtient $n!$;
- quand on choisit seulement k personnes dans un ordre, on obtient un produit plus court (voir ci-après) ;

6.2.3 Choix ordonné de k personnes parmi n

Supposons que n candidats soient disponibles et que l'on veuille attribuer k rôles distincts.

- n choix pour le premier rôle ;
- $n - 1$ choix pour le deuxième ;
- $n - 2$ choix pour le troisième ;
- ...
- $n - k + 1$ choix pour le k -ième rôle.

Le nombre total de choix ordonnés est donc

$$n(n-1)(n-2) \cdots (n-k+1).$$

On peut aussi l'écrire avec les factorielles :

$n(n-1) \cdots (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$

Exemple 3. Parmi 10 habitants, on veut choisir :

- un président ;
- un vice-président ;
- un secrétaire.

Le nombre de choix est

$$10 \times 9 \times 8 = 720.$$

choix ordonné de k personnes parmi $n = n(n-1) \cdots (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$

6.2.4 Petit schéma de compréhension

Voici le raisonnement à retenir :

groupe sans ordre

$\Longleftarrow$

groupe avec ordre

puis on divise par $k!$

$$\frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{k!} = \binom{n}{k}$$

On peut aussi résumer sous forme de tableau :

Situation	Ordre ?	Nombre de choix
Choisir un sefo puis un adjoint	Oui	$n(n-1)$
Choisir 2 représentants	Non	$\binom{n}{2}$
Choisir k personnes avec rôles distincts	Oui	$\frac{n!}{(n-k)!}$
Choisir k personnes sans rôle	Non	$\binom{n}{k}$

6.2.5 À retenir

—

$n! = n(n-1)(n-2) \cdots 2 \cdot 1$

compte les arrangements complets de n objets distincts.

$$\frac{n!}{(n-k)!}$$

compte les choix ordonnés de k objets parmi n .

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

compte les choix sans ordre de k objets parmi n .

— En particulier,

$$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

6.2.6 Exercices

Exercice 1. Lors d'une fête communale, n personnes sont candidates pour participer à l'organisation.

1. Combien y a-t-il de façons de choisir 4 personnes et de leur attribuer les rôles suivants : président, vice-président, secrétaire, trésorier ?
2. Combien y a-t-il de façons de choisir simplement un groupe de 4 personnes, sans rôle ?
3. Retrouver à partir de la question 1 la formule

$$\binom{n}{4} = \frac{n!}{4!(n-4)!}.$$

4. Calculer $\binom{11}{4}$.
5. Même question si l'on choisit 4 personnes parmi 11, mais que deux rôles seulement sont distincts : un président et un secrétaire, les deux autres membres n'ayant pas de rôle particulier.

Exercice 2 — Défi des fokontany. Trois fokontany, appelés A , B et C , présentent chacun 4 candidats pour organiser une fête communale. Il y a donc 12 candidats au total.

On souhaite former un comité de 5 personnes.

1. Combien de comités de 5 personnes peut-on former sans aucune contrainte ?

2. On exige désormais que chacun des trois fokontany soit représenté par au moins une personne.

Combien de comités peut-on former ?

Indication : compter tous les comités, puis retirer ceux dans lesquels l'un des fokontany n'est pas représenté.

3. Dans chaque comité satisfaisant la condition précédente, on désigne :

- un président ;
- un trésorier.

Le président et le trésorier doivent appartenir à deux fokontany différents.

Combien d'organisations différentes peut-on former ?

Indication : on pourra commencer par choisir les fokontany du président et du trésorier, puis les personnes occupant ces fonctions, et enfin les trois autres membres du comité.

4. Soa et Tovo sont deux candidats du fokontany A. À la suite d'un désaccord, ils refusent de siéger ensemble dans le même comité.

Combien de comités de 5 personnes peut-on former si :

- chacun des trois fokontany doit être représenté ;
- Soa et Tovo ne peuvent pas appartenir simultanément au comité ?

5. On impose maintenant simultanément toutes les contraintes suivantes :

- le comité contient 5 personnes ;
- chacun des trois fokontany est représenté ;
- le président et le trésorier appartiennent à deux fokontany différents ;
- Soa et Tovo ne siègent pas ensemble.

Combien d'organisations différentes peut-on former ?

Indication : partir du résultat de la question 3 et retirer les organisations interdites contenant à la fois Soa et Tovo. Pour compter ces organisations interdites, distinguer plusieurs cas selon les fonctions éventuellement occupées par Soa et Tovo.

$$Q_1 = 792$$

$$Q_2 = 624$$

$$Q_3 = 9\,600$$

$$Q_4 = 544$$

$$Q_5 = 8\,384$$

6.3 Inclusion–Exclusion

Dans plusieurs problèmes de combinatoire, il est plus simple de compter d'abord *tous les cas*, puis de retirer les cas interdits.

$$\text{Nombre de cas valides} = \text{Nombre total de cas} - \text{Nombre de cas interdits}$$

Cependant, lorsque plusieurs catégories de cas interdits se recouvrent, certains objets peuvent être retirés plusieurs fois. Il faut alors les ajouter de nouveau. C'est le principe d'**inclusion–exclusion**.

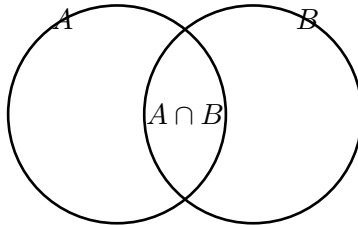
6.3.1 Deux ensembles

Soient A et B deux ensembles.

Si l'on additionne $|A|$ et $|B|$, les éléments appartenant à la fois à A et à B sont comptés deux fois.

Il faut donc retrancher une fois leur intersection :

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$



Exemple 1. Dans un lycée, 28 élèves pratiquent le football, 19 pratiquent le basket-ball et 8 pratiquent les deux sports.

Le nombre d'élèves pratiquant au moins l'un des deux sports est

$$28 + 19 - 8 = 39.$$

Ainsi,

$$39 \text{ élèves pratiquent au moins un des deux sports.}$$

Sans le terme -8 , les 8 élèves pratiquant les deux sports seraient comptés deux fois.

6.3.2 Compter par le complémentaire

Soit E l'ensemble de toutes les possibilités, et soit A l'ensemble des cas interdits.

Alors

$$|E \setminus A| = |E| - |A|$$

Exemple 2. On forme un code de 4 chiffres à l'aide des chiffres

$$0, 1, 2, \dots, 9.$$

Il y a au total

$$10^4$$

codes.

Les codes ne contenant aucun 7 sont au nombre de

$$9^4.$$

Le nombre de codes contenant au moins un 7 est donc

$$10^4 - 9^4 = 3439.$$

6.3.3 Retour aux trois fokontany

Trois fokontany A , B et C présentent chacun 4 candidats. On veut former un comité de 5 personnes dans lequel chaque fokontany est représenté.

Il y a au total

$$\binom{12}{5}$$

comités.

Notons :

- E_A : les comités ne contenant personne du fokontany A ;
- E_B : les comités ne contenant personne du fokontany B ;
- E_C : les comités ne contenant personne du fokontany C .

Pour chacun de ces événements, on choisit les 5 membres parmi les 8 candidats des deux autres fokontany :

$$|E_A| = |E_B| = |E_C| = \binom{8}{5}.$$

Il est impossible que deux fokontany soient simultanément absents, car il faudrait choisir 5 personnes parmi les 4 candidats du fokontany restant. Ainsi,

$$|E_A \cap E_B| = |E_A \cap E_C| = |E_B \cap E_C| = 0.$$

Le nombre de comités valides est donc

$$\boxed{\binom{12}{5} - 3\binom{8}{5} = 624.}$$

Il s'agit déjà d'une application du principe d'inclusion-exclusion.

6.3.4 Trois ensembles

Pour trois ensembles A , B et C , on commence par additionner leurs tailles :

$$|A| + |B| + |C|.$$

Tout élément appartenant exactement à deux ensembles a été compté deux fois. Un élément appartenant aux trois ensembles a été compté trois fois.

$$-|A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C|.$$

Mais les éléments de $A \cap B \cap C$ ont alors été :

- comptés trois fois au début ;
- puis retranchés trois fois.

Ils ne sont donc plus comptés du tout. Il faut les ajouter une fois.

On obtient :

$$\boxed{\begin{aligned} |A \cup B \cup C| &= |A| + |B| + |C| \\ &\quad - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| \\ &\quad + |A \cap B \cap C|. \end{aligned}}$$

Les signes alternent donc :

+ ensembles seuls - intersections de deux ensembles + intersection des trois ensembles.

6.3.5 Forme complémentaire

Si E est l'ensemble de toutes les possibilités et si A, B, C désignent trois catégories de cas interdits, alors le nombre de cas valides est

$$|E \setminus (A \cup B \cup C)|.$$

Par inclusion-exclusion,

$$\begin{aligned} |E \setminus (A \cup B \cup C)| &= |E| - |A| - |B| - |C| \\ &\quad + |A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C| \\ &\quad - |A \cap B \cap C|. \end{aligned}$$

6.3.6 Exemple numérique

Parmi les entiers de 1 à 100, combien sont divisibles par 2 ou par 5 ?
Notons :

$$A = \{\text{multiples de 2}\}, \quad B = \{\text{multiples de 5}\}.$$

On a

$$|A| = 50, \quad |B| = 20.$$

Les nombres divisibles à la fois par 2 et par 5 sont les multiples de 10 :

$$|A \cap B| = 10.$$

Ainsi,

$$|A \cup B| = 50 + 20 - 10 = 60.$$

Donc

$$60 \text{ entiers sont divisibles par 2 ou par 5.}$$

Le nombre d'entiers qui ne sont divisibles ni par 2, ni par 5, est

$$100 - 60 = 40.$$

6.3.7 À retenir

On additionne les cas simples,

on retranche les doubles intersections,

on ajoute les triples intersections, etc.

Le principe général repose sur une alternance de signes :

$+$ $-$ $+$ $-$ $\dots$

6.3.8 Exercice de compréhension

Dans une classe de 40 élèves :

- 25 élèves parlent malgache ;
- 18 élèves parlent français ;
- 10 élèves parlent les deux langues.

1. Combien d'élèves parlent au moins l'une des deux langues ?
2. Combien d'élèves ne parlent aucune de ces deux langues ?

6.3.9 Exercice +

Parmi les entiers de 1 à 200, déterminer :

1. le nombre d'entiers divisibles par 3 ;
2. le nombre d'entiers divisibles par 5 ;
3. le nombre d'entiers divisibles par 3 et par 5 ;
4. le nombre d'entiers divisibles par 3 ou par 5 ;
5. le nombre d'entiers divisibles ni par 3, ni par 5.

6.3.10 Exercice ++

Quatre fokontany présentent chacun 4 candidats. On souhaite former un comité de 6 personnes dans lequel chacun des quatre fokontany est représenté.

1. Combien de comités de 6 personnes peut-on former sans contrainte ?
2. Pour un fokontany fixé, combien de comités ne contiennent aucun de ses candidats ?

3. Pour deux fokontany fixés, combien de comités ne contiennent aucun candidat de ces deux fokontany ?
4. Montrer que le nombre de comités dans lesquels chacun des quatre fokontany est représenté est

$$\binom{16}{6} - 4\binom{12}{6} + \binom{4}{2}\binom{8}{6}.$$

6.4 Concept : les bijections

Une méthode fondamentale en combinatoire consiste à remplacer les objets que l'on souhaite compter par d'autres objets, plus simples à dénombrer.

6.4.1 Exemple introductif : Soa, Tovo, Fara, Hery et les mots binaires

On considère l'ensemble de quatre élèves

$$E = \{\text{Soa}, \text{Tovo}, \text{Fara}, \text{Hery}\}.$$

On souhaite former un comité en choisissant certains de ces élèves. Le comité peut éventuellement être vide.

On fixe l'ordre suivant :

$$(\text{Soa}, \text{Tovo}, \text{Fara}, \text{Hery}).$$

À chaque comité, on associe un mot de quatre chiffres composé de 0 et de 1 :

- on écrit 1 lorsque l'élève appartient au comité ;
- on écrit 0 lorsque l'élève n'appartient pas au comité.

Par exemple,

$$\{\text{Soa}, \text{Fara}\} \longleftrightarrow 1010.$$

Soa	Tovo	Fara	Hery
1	0	1	0

$$\{\text{Soa}, \text{Fara}\} \longleftrightarrow 1010$$

De même,

$$\{\text{Tovo, Fara, Hery}\} \longleftrightarrow 0111,$$

$$\emptyset \longleftrightarrow 0000,$$

et

$$E \longleftrightarrow 1111.$$

Chaque comité donne un unique mot binaire, et chaque mot binaire détermine un unique comité.

Comme chacune des quatre positions possède deux possibilités, 0 ou 1, le nombre de mots binaires est

$$2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^4 = 16.$$

Il existe donc également 16 comités possibles.

Plus généralement, pour un ensemble de n personnes, chaque sous-ensemble correspond à un mot binaire de longueur n . Par conséquent,

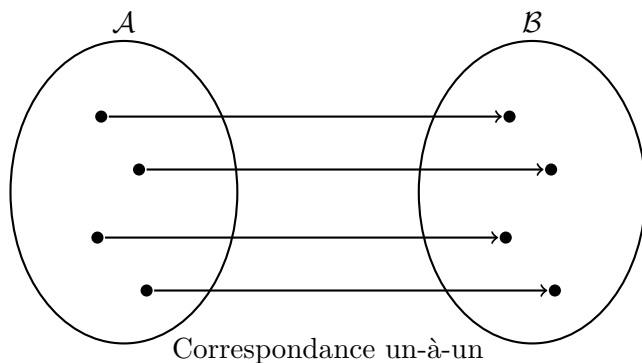
Un ensemble à n éléments possède 2^n sous-ensembles.

6.4.2 Le concept : une correspondance un-à-un pour compter

Une **bijection** entre deux ensembles $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ est une correspondance telle que :

- chaque élément de $\mathcal{A}$ correspond à un unique élément de $\mathcal{B}$;
- chaque élément de $\mathcal{B}$ correspond à un unique élément de $\mathcal{A}$.

Il s'agit donc d'une correspondance parfaite, *un objet contre un objet*.



Lorsqu'il existe une bijection entre deux ensembles finis, ces deux ensembles ont le même nombre d'éléments :

$$\boxed{\mathcal{A} \longleftrightarrow \mathcal{B} \quad \implies \quad |\mathcal{A}| = |\mathcal{B}|.}$$

La stratégie de comptage est donc la suivante :

Pour compter une famille d'objets compliqués, on construit une bijection avec une famille d'objets plus faciles à compter.

$$\boxed{\text{objets compliqués} \longleftrightarrow \text{objets simples}}$$

Dans l'exemple précédent,

$$\boxed{\text{comités formés parmi } n \text{ personnes} \longleftrightarrow \text{mots binaires de longueur } n.}$$

6.4.3 Exercices

Un premier exercice simple

On considère 7 candidats d'un fokontany :

$$\mathcal{E} = \{A, B, C, D, E, F, G\}.$$

On souhaite former un comité d'exactly 3 personnes.

À chaque comité, on associe un mot binaire de longueur 7, dans lequel 1 signifie que le candidat est choisi et 0 qu'il ne l'est pas.

Par exemple,

$$\{A, D, G\} \longleftrightarrow 1001001.$$

1. Quel comité correspond au mot

$$0110100?$$

2. Quel mot correspond au comité

$$\{B, E, F\}?$$

3. Combien de chiffres 1 possède le mot associé à un comité de 3 personnes ?

4. Montrer que les comités de 3 personnes sont en bijection avec les mots binaires de longueur 7 contenant exactement 3 chiffres égaux à 1.
5. En déduire que le nombre de comités est

$$\binom{7}{3}.$$

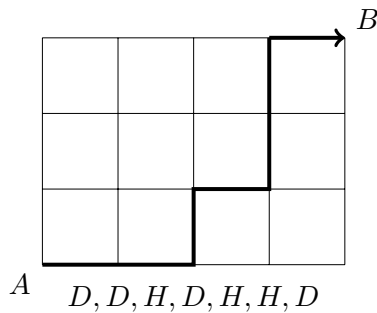
6. Généraliser : avec n candidats, combien existe-t-il de comités de k personnes ?

Chemins sur un quadrillage et coefficient binomial $\binom{p+q}{p}$

On considère un quadrillage. Pour aller du point A au point B par un chemin de longueur minimale, on est uniquement autorisé à effectuer :

- un déplacement vers la droite, noté D ;
- un déplacement vers le haut, noté H .

Voici un exemple de chemin comportant 4 déplacements vers la droite et 3 déplacements vers le haut.



À chaque chemin, on associe le mot formé par la suite de ses déplacements.

Dans l'exemple représenté,

$$\text{chemin} \longleftrightarrow DDHDHHD.$$

1. Combien de lettres D et de lettres H possède le mot associé au chemin représenté ?

2. Montrer qu'un chemin minimal de A vers B correspond à un unique mot contenant 4 lettres D et 3 lettres H .
3. Réciproquement, montrer que tout mot contenant 4 lettres D et 3 lettres H définit un unique chemin minimal.
4. En déduire que le nombre de chemins représentés sur cette grille est

$$\binom{7}{4} = \binom{7}{3}.$$

5. On considère maintenant un quadrillage nécessitant p déplacements vers la droite et q déplacements vers le haut. Montrer que les chemins minimaux sont en bijection avec les mots de longueur $p+q$ contenant exactement p lettres D .
6. En déduire que le nombre de chemins minimaux est

$$\boxed{\binom{p+q}{p} = \binom{p+q}{q}}.$$

Partitionner $2n$ personnes en n binômes

On considère $2n$ personnes distinctes. On souhaite les répartir en n binômes, sans distinguer :

- l'ordre des deux personnes à l'intérieur d'un binôme ;
- l'ordre dans lequel les binômes sont présentés.

Par exemple, avec six personnes,

$\{\text{Soa}, \text{Tovo}, \text{Fara}, \text{Hery}, \text{Mamy}, \text{Voara}\},$

une partition possible est

$\{\{\text{Soa}, \text{Tovo}\}, \{\text{Fara}, \text{Hery}\}, \{\text{Mamy}, \text{Voara}\}\}.$

Binôme 1	Binôme 2	Binôme 3
Soa Tovo	Fara Hery	Mamy Voara

On numérote maintenant les personnes de 1 à $2n$.

1. Pour $n = 2$, écrire toutes les façons de partager les quatre personnes

$$\{1, 2, 3, 4\}$$

en deux binômes.

2. Pour $n = 3$, construire quelques partitions des six personnes

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

en trois binômes.

3. À une permutation

$$(a_1, a_2, \dots, a_{2n}),$$

on associe les binômes consécutifs

$$\{a_1, a_2\}, \{a_3, a_4\}, \dots, \{a_{2n-1}, a_{2n}\}.$$

Expliquer pourquoi cette correspondance n'est pas encore une bijection.

4. Pour une partition fixée, expliquer pourquoi on peut :
 — échanger les deux personnes dans chacun des n binômes de 2^n façons ;
 — permuter les n binômes de $n!$ façons.
5. En déduire qu'une même partition est représentée par exactement

$$2^n n!$$

permutations.

6. Comme il existe $(2n)!$ permutations des $2n$ personnes, montrer que le nombre de partitions en n binômes est

$$\boxed{\frac{(2n)!}{2^n n!}}.$$

7. Vérifier que, pour six personnes, le nombre de partitions en trois binômes est

$$\frac{6!}{2^3 3!} = 15.$$

8. On appelle P_n le nombre de partitions de $2n$ personnes en n binômes. Montrer également que

$$P_n = (2n - 1)P_{n-1}.$$

9. Expliquer cette dernière formule en choisissant d'abord le partenaire de la personne numéro 1.

6.4.4 À retenir

Une bijection permet de compter une famille d'objets en la mettant en correspondance parfaite avec une autre famille dont le nombre d'éléments est déjà connu ou plus facile à déterminer.

$$\mathcal{A} \longleftrightarrow \mathcal{B} \implies |\mathcal{A}| = |\mathcal{B}|$$