

CHAPITRE 7

Invariants

De nombreux problèmes d'olympiades décrivent une situation que l'on transforme en répétant une même opération. On demande alors si un certain état peut être atteint, si le processus doit s'arrêter, ou quelle sera sa configuration finale.

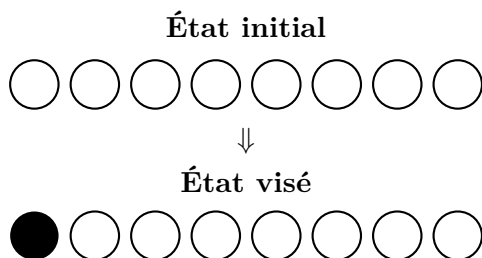
Essayer toutes les suites d'opérations est souvent impossible. L'idée consiste plutôt à chercher une propriété qui ne change jamais au cours du processus : un **invariant**.

7.1 Exemple introductif : retourner des jetons

On dispose de 8 jetons, tous placés face blanche visible.

À chaque opération, on doit retourner exactement deux jetons.

Peut-on obtenir une configuration contenant exactement un jeton noir ?



Notons N le nombre de jetons noirs.

Lorsqu'on retourne deux jetons, trois situations sont possibles :

- deux jetons blancs deviennent noirs : N augmente de 2 ;
- un jeton blanc et un jeton noir sont retournés : N ne change pas ;
- deux jetons noirs deviennent blancs : N diminue de 2.

Ainsi, à chaque opération,

$$N \longmapsto N + 2, \quad N, \quad \text{ou} \quad N - 2.$$

La parité de N ne change donc jamais.

Au départ,

$$N = 0,$$

qui est pair. Après n'importe quel nombre d'opérations, N reste pair. Or l'état demandé contient exactement un jeton noir, donc

$$N = 1,$$

qui est impair.

L'état demandé est donc impossible à atteindre.

La parité du nombre de jetons noirs est un invariant.

7.2 Le concept d'invariant

7.2.1 Définition

Un **état** décrit complètement la situation à un instant donné.

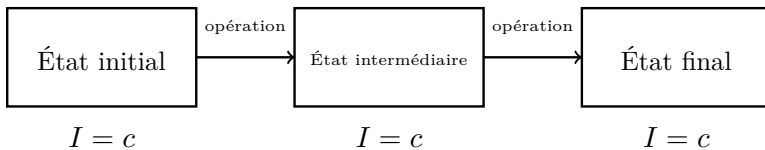
Une **opération autorisée** transforme un état en un autre.

Une quantité I est appelée un **invariant** lorsqu'elle conserve toujours la même valeur après chaque opération autorisée.

Autrement dit, si un état S est transformé en un état S' , alors

$$I(S') = I(S).$$

On peut représenter le principe ainsi :



Si l'état initial et l'état visé n'ont pas la même valeur de l'invariant, alors l'état visé est inaccessible.

$$I(\text{état initial}) \neq I(\text{état visé}) \implies \text{état visé impossible.}$$

7.2.2 Méthode de recherche

Pour résoudre un problème par invariant, on peut suivre les étapes suivantes.

1. **Décrire l'état.**

Quels nombres, couleurs, positions ou objets caractérisent la situation ?

2. **Analyser une opération.**

Quelles quantités sont modifiées ? De combien ?

3. **Chercher ce qui ne change pas.**

Il peut s'agir :

- d'une parité ;
- d'un reste modulo un entier ;
- d'une somme ;
- d'une somme pondérée ;
- d'un produit ;
- d'un PGCD ;
- du nombre d'objets d'une certaine couleur.

4. **Comparer l'état initial et l'état visé.**

Si les valeurs de l'invariant sont différentes, l'état visé est impossible.

Analyser une opération $\implies$ trouver ce qui reste constant

Comparer l'état initial et l'état final

7.2.3 Une précaution importante

Un invariant donne souvent une **condition nécessaire**, mais pas toujours une condition suffisante.

Si deux états ont des valeurs différentes de l'invariant, alors ils ne peuvent pas être reliés.

En revanche, s'ils ont la même valeur de l'invariant, cela ne prouve pas automatiquement que l'on peut passer de l'un à l'autre.

$I(S) = I(S')$ ne garantit pas toujours que S' est accessible depuis S .

Il faut parfois compléter l'étude par une construction explicite ou par un second invariant.

7.3 Invariants classiques

7.3.1 Parité et congruences

La parité est l'invariant le plus simple.

Deux entiers ont la même parité lorsqu'ils sont congrus modulo 2.

$$a \equiv b \pmod{2}$$

signifie que a et b sont tous deux pairs ou tous deux impairs.

Plus généralement, on peut étudier le reste modulo un entier m .

Exemple. Un nombre entier est initialement égal à 7.

À chaque opération, on peut :

- lui ajouter 6 ;
- ou lui retrancher 9.

Peut-on atteindre 101 ?

Les nombres 6 et 9 sont divisibles par 3. Chaque opération conserve donc le reste modulo 3.

Au départ,

$$7 \equiv 1 \pmod{3}.$$

Tous les nombres accessibles sont donc congrus à 1 modulo 3.

Mais

$$101 \equiv 2 \pmod{3}.$$

Ainsi,

Le nombre 101 ne peut pas être atteint.

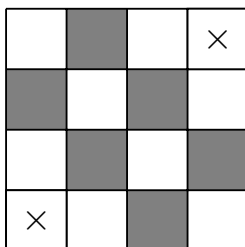
Ici, l'invariant est le reste modulo 3.

7.3.2 Coloriages

Un coloriage permet d'associer à chaque case, sommet ou position une couleur. On étudie ensuite la façon dont chaque opération agit sur les différentes couleurs.

Exemple : l'échiquier mutilé. On considère un échiquier 4×4 , dont on retire deux coins opposés.

Peut-on recouvrir les 14 cases restantes à l'aide de 7 dominos 1×2 ?



Un domino placé sur l'échiquier recouvre toujours :

- une case noire ;
- une case blanche.

Tout pavage par dominos doit donc recouvrir le même nombre de cases noires et de cases blanches.

Un échiquier 4×4 contient initialement 8 cases noires et 8 cases blanches.

Les deux coins opposés retirés ont la même couleur. Il reste donc :

6 cases d'une couleur et 8 cases de l'autre couleur.

Il est impossible que chaque domino recouvre une case de chaque couleur.

Ainsi,

L'échiquier mutilé ne peut pas être pavé par des dominos.

L'invariant est ici la différence entre le nombre de cases noires et le nombre de cases blanches recouvertes.

7.3.3 Sommes et sommes pondérées

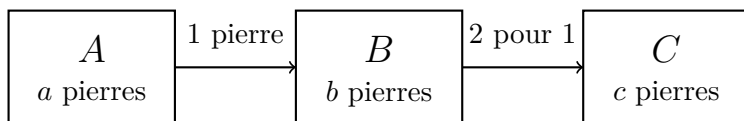
La somme totale des quantités présentes est parfois conservée.

Dans des problèmes plus délicats, la somme ordinaire varie, mais une **somme pondérée** reste constante.

Exemple : trois boîtes. Trois boîtes A , B et C contiennent respectivement a , b et c pierres.

Les opérations autorisées sont les suivantes :

- transférer une pierre de A vers B ;
- retirer deux pierres de B et placer une pierre dans C .



La somme ordinaire $a + b + c$ n'est pas conservée par la seconde opération.

Considérons plutôt

$$I = a + b + 2c.$$

Lors de la première opération,

$$(a, b, c) \mapsto (a - 1, b + 1, c),$$

donc

$$I \mapsto (a - 1) + (b + 1) + 2c = I.$$

Lors de la seconde opération,

$$(a, b, c) \mapsto (a, b - 2, c + 1),$$

donc

$$I \mapsto a + (b - 2) + 2(c + 1) = I.$$

Ainsi,

$$I = a + b + 2c$$

est un invariant.

À partir de l'état

$$(8, 0, 0),$$

on a

$$I = 8.$$

L'état

$$(0, 1, 3)$$

a pour valeur

$$I = 0 + 1 + 2 \times 3 = 7.$$

Il est donc inaccessible.

En revanche,

$$(0, 2, 3)$$

a la même valeur $I = 8$, et cet état est effectivement accessible.

7.3.4 Le PGCD

Le plus grand commun diviseur peut également rester constant.

On utilise l'identité fondamentale

$$\gcd(a, b) = \gcd(a - b, b) = \gcd(a + b, b).$$

Exemple. On part d'un couple d'entiers positifs (a, b) . Une opération permet de remplacer l'un des deux nombres par sa somme ou sa différence avec l'autre.

Le PGCD des deux nombres ne change jamais.

Ainsi, à partir de

$$(18, 30),$$

tous les couples accessibles ont pour PGCD

$$\gcd(18, 30) = 6.$$

Il est donc impossible d'atteindre le couple

$$(17, 31),$$

car

$$\gcd(17, 31) = 1.$$

7.4 Monovariants

Un invariant reste constant. Une autre idée très utile consiste à trouver une quantité qui varie toujours dans le même sens.

7.4.1 Définition

Un **monovariant** est une quantité qui :

- augmente strictement après chaque opération ;
- ou diminue strictement après chaque opération.

$$M(S') < M(S)$$

ou

$$M(S') > M(S).$$

Un monovariant permet notamment de prouver :

- qu'un processus doit s'arrêter ;
- qu'un état ne peut jamais réapparaître ;
- qu'un cycle est impossible.

7.4.2 Exemple : l'algorithme des différences

On considère deux entiers positifs a et b .

Tant qu'ils sont différents, on remplace le plus grand par la différence des deux nombres.

Par exemple,

$$(18, 30) \mapsto (18, 12) \mapsto (6, 12) \mapsto (6, 6).$$

La somme

$$M = a + b$$

diminue strictement à chaque opération.

Elle reste pourtant un entier positif. Elle ne peut donc pas diminuer indéfiniment.

Le processus doit s'arrêter.

Par ailleurs, le PGCD de a et b est invariant. Lorsque le processus s'arrête, les deux nombres sont égaux. Leur valeur commune est donc le PGCD initial.

Dans l'exemple,

$\gcd(18, 30) = 6.$

On obtient bien le couple final

$(6, 6).$

Cet exemple utilise simultanément :

un invariant : le PGCD

et

un monovariant : la somme $a + b$.

7.5 À retenir

Outil	Comportement	Utilité principale
Invariant	reste constant	prouver une impossibilité
Monovariant	augmente ou diminue	prouver la terminaison
Parité	reste modulo 2	opérations modifiant un nombre pair d'objets
Congruence	reste modulo m	déplacements par multiples de m
Coloriage	classes de couleurs	pavages et déplacements
Somme pondérée	combinaison $w_1x_1 + \dots + w_nx_n$	compensations entre opérations
PGCD	diviseurs communs	opérations par sommes et différences

Invariant différent $\implies$ état inaccessible

Monovariant borné $\implies$ le processus finit par s'arrêter

7.6 Exercices de compréhension

Exercice 1. On dispose de 20 jetons, initialement tous blancs. À chaque opération, on retourne exactement 6 jetons.

- 1. Comment varie la parité du nombre de jetons noirs ?
- 2. Peut-on obtenir exactement 5 jetons noirs ?
- 3. Peut-on obtenir exactement 8 jetons noirs ? L'invariant suffit-il à conclure ?

Exercice 2. Un entier est initialement égal à 4. À chaque opération, on peut lui ajouter 10 ou lui retrancher 15.

- 1. Quel reste modulo 5 est invariant ?
- 2. Peut-on atteindre 2026 ?
- 3. Peut-on atteindre 2024 ?

Exercice 3. Un cavalier est placé sur une case noire d'un échiquier.

1. Montrer qu'après chaque déplacement, il change de couleur de case.
2. Peut-il revenir à sa case initiale après un nombre impair de déplacements ?
3. Peut-il revenir à sa case initiale après un nombre pair de déplacements ?
L'invariant suffit-il à répondre ?

Exercice 4. Pour chacune des quantités suivantes, dire s'il s'agit plutôt d'un invariant ou d'un monovariant :

1. le PGCD dans l'algorithme des différences ;
2. la somme des deux nombres dans ce même algorithme ;
3. la parité du nombre de jetons noirs lorsqu'on retourne deux jetons ;
4. le nombre de piles lorsqu'on fusionne deux piles en une seule.

7.7 Exercices faciles

Exercice 5. Dix entiers sont initialement tous égaux à 0.

À chaque opération, on choisit exactement deux de ces entiers et on ajoute 1 à chacun d'eux.

1. Montrer que la parité du nombre d'entiers impairs est invariante.
2. Peut-on obtenir une configuration contenant exactement un entier impair ?
3. Peut-on obtenir une configuration contenant exactement deux entiers impairs ?

Exercice 6. Un échiquier 6×6 est privé de deux coins opposés.

1. Combien contient-il initialement de cases noires et de cases blanches ?
2. Les deux coins opposés ont-ils la même couleur ?
3. Peut-on paver les cases restantes avec des dominos 1×2 ?

Exercice 7. On part du couple

$$(84, 30).$$

À chaque opération, on peut remplacer l'un des nombres par la somme ou la différence positive des deux nombres.

1. Montrer que le PGCD est invariant.
2. Peut-on atteindre le couple $(15, 21)$?
3. Peut-on atteindre le couple $(12, 18)$?
4. Le PGCD suffit-il toujours à garantir qu'un couple est accessible ?

Exercice 8. Des nombres entiers sont écrits aux sommets d'un triangle.

À chaque opération, on ajoute 1 aux nombres situés à deux sommets différents.

1. Montrer que la parité de la somme des trois nombres est invariante.
2. En partant de $(0, 0, 0)$, peut-on atteindre $(1, 1, 1)$?
3. Peut-on atteindre $(1, 1, 0)$?

7.8 Exercices +

Exercice 9 — Les trois boîtes. Trois boîtes A , B et C contiennent respectivement a , b et c pierres.

Les opérations autorisées sont :

- transférer une pierre de A vers B ;
- remplacer deux pierres de B par une pierre dans C .

On part de la configuration

$$(12, 0, 0).$$

1. Montrer que $a + b + 2c$ est invariant.
2. Peut-on atteindre $(0, 1, 5)$?
3. Peut-on atteindre $(0, 2, 5)$?
4. Donner explicitement une suite d'opérations permettant d'atteindre $(0, 2, 5)$.

Exercice 10 — Pavage par carrés 2×2 . On considère un damier 6×6 .

On retire les quatre cases

$$(1, 1), \quad (1, 3), \quad (3, 1), \quad (3, 3),$$

où (i, j) désigne la case située sur la ligne i et la colonne j .

On souhaite paver les 32 cases restantes avec des carrés 2×2 .

1. Colorier les cases avec quatre couleurs selon les parités de i et de j .
2. Montrer que tout carré 2×2 recouvre exactement une case de chaque couleur.
3. Vérifier que les quatre cases retirées ont la même couleur.
4. En déduire que le pavage est impossible.

Exercice 11 — Pierres disposées en cercle. On dispose $2n$ tas de pierres sur un cercle. Leurs tailles sont

$$a_1, a_2, \dots, a_{2n}.$$

À chaque opération, on choisit deux tas voisins et on ajoute une pierre à chacun d'eux.

1. Montrer que la somme alternée

$$S = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + a_{2n-1} - a_{2n}$$

est invariante.

2. On part de

$$(1, 0, 0, \dots, 0).$$

Peut-on obtenir une configuration dans laquelle tous les tas ont la même taille ?

3. Même question si l'on part de

$$(1, 1, 0, \dots, 0).$$

L'invariant suffit-il à conclure ?

Exercice 12 — Produit invariant. Des nombres non nuls sont écrits au tableau.

Une opération consiste à changer simultanément le signe de deux nombres.

1. Montrer que le produit de tous les nombres est invariant.
2. En partant de nombres tous positifs, peut-on obtenir exactement un nombre négatif ?
3. Peut-on obtenir exactement quatre nombres négatifs ?

7.9 Exercices ++

Exercice 13 — Jetons alignés. On considère n jetons alignés, initialement tous blancs.

À chaque opération, on retourne deux jetons voisins.

1. Montrer que toute configuration accessible contient un nombre pair de jetons noirs.
2. Soient $i < j$. Montrer qu'en retournant successivement les paires

$$(i, i+1), (i+1, i+2), \dots, (j-1, j),$$

seuls les jetons situés aux positions i et j changent finalement de couleur.

3. En déduire que toute configuration contenant un nombre pair de jetons noirs est accessible.
4. Conclure qu'une configuration est accessible si et seulement si elle contient un nombre pair de jetons noirs.

Exercice 14 — Les quatre coins d'un rectangle. Une grille rectangulaire comporte m lignes et n colonnes. Toutes les cases sont initialement blanches.

Une opération consiste à choisir deux lignes et deux colonnes, puis à changer la couleur des quatre cases situées à leurs intersections.

1. Montrer que, dans chaque ligne, la parité du nombre de cases noires est invariante.
2. Montrer de même que, dans chaque colonne, cette parité est invariante.
3. En déduire que toute configuration accessible possède un nombre pair de cases noires dans chaque ligne et dans chaque colonne.
4. Réciproquement, considérer une configuration possédant cette propriété. Pour chaque case noire (i, j) , avec $i < m$ et $j < n$, effectuer l'opération sur les lignes i, m et les colonnes j, n .
5. Montrer que cette procédure permet d'effacer toutes les cases noires.
6. Conclure qu'une configuration est accessible si et seulement si chaque ligne et chaque colonne contient un nombre pair de cases noires.

Exercice 15 — Invariant et monovariant. On considère une liste finie d'entiers positifs.

À chaque opération, on choisit deux nombres distincts $a > b$ et on remplace a par $a - b$.

1. Montrer que le PGCD de tous les nombres de la liste est invariant.
2. Montrer que la somme de tous les nombres diminue strictement.
3. En déduire que le processus doit s'arrêter.
4. Décrire les configurations dans lesquelles aucune opération n'est possible.
5. Que peut-on déduire sur la valeur finale commune des nombres ?

7.10 Problèmes complexes

Problème 1 — Le taquin de quinze pièces. Un taquin est constitué de 15 pièces numérotées et d'une case vide, disposées dans une grille 4×4 .

Une opération consiste à déplacer dans la case vide une pièce voisine horizontalement ou verticalement.

On part de la configuration ordonnée

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	□

Peut-on atteindre la configuration

1	2	3	4
5	6	7	8?
9	10	11	12?
13	15	14	□

Indications :

- chaque déplacement échange la case vide et une pièce ;
- colorier la grille comme un échiquier ;
- si la case vide revient à sa position initiale, le nombre de déplacements est pair ;
- comparer la parité de la permutation des 16 objets.

Problème 2 — Une opération algébrique. Les nombres

$$x_1, x_2, \dots, x_n$$

sont écrits au tableau.

À chaque opération, on choisit deux nombres x et y , on les efface et on écrit à leur place le nombre

$$x + y - xy.$$

Après $n - 1$ opérations, il ne reste qu'un seul nombre.

1. Montrer que

$$1 - (x + y - xy) = (1 - x)(1 - y).$$

2. Trouver une quantité multiplicative qui reste invariante au cours du processus.
3. Montrer que le dernier nombre ne dépend pas de l'ordre des opérations.
4. Exprimer ce dernier nombre en fonction de $x_1, x_2, \dots, x_n$.
5. Calculer le nombre final lorsque les nombres initiaux sont

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n+1}.$$

Problème 3 — Pavage par barres de longueur 3. On considère un damier 10×10 , dont on retire la case située sur la première ligne et la deuxième colonne.

Peut-on paver les 99 cases restantes à l'aide de rectangles 1×3 , placés horizontalement ou verticalement ?

Indications :

- attribuer à la case (i, j) la couleur déterminée par

$$i + j \pmod{3};$$

- montrer que toute barre 1×3 recouvre une case de chacune des trois couleurs ;
- compter le nombre de cases de chaque couleur avant et après le retrait.

Problème 4 — Égalisation sur un cycle pair. Des entiers sont placés aux sommets d'un polygone à $2n$ sommets.

Une opération permet d'ajouter 1, ou de retrancher 1, aux nombres situés à deux sommets voisins.

1. Montrer que la somme alternée des nombres est invariante.
2. Montrer que si tous les nombres peuvent être rendus égaux, alors la somme alternée initiale est nulle.
3. Prouver réciproquement que, si la somme alternée initiale est nulle, alors il est possible de rendre tous les nombres égaux.

Indication : procéder successivement autour du polygone en corrigeant les sommets les uns après les autres.

Problème 5 — Une suite de transformations. On place les nombres

$$1, 2, 3, \dots, 2026$$

au tableau.

À chaque opération, on choisit deux nombres a et b , on les efface et on écrit leur somme $a + b$.

1. Quel invariant évident peut-on utiliser ?
2. Quel sera nécessairement le dernier nombre inscrit ?
3. Le résultat dépend-il de l'ordre des opérations ?
4. Combien d'opérations sont nécessaires ?
5. Identifier un monovariant simple.