

Une droite qui sépare le nuage de points

IMO · 2020 · Russie

Montrer qu'il existe une constante strictement positive c telle que l'assertion suivante soit vraie :

Considérons un entier $n > 1$, et un ensemble S de n points du plan tel que la distance entre deux points distincts dans S soit toujours au moins égale à 1. Alors il existe une droite ℓ qui sépare S , de sorte que la distance de n'importe quel point de S à ℓ vaut au moins $cn^{-1/3}$.

(On dit qu'une droite ℓ *sépare* un ensemble de points S lorsque ℓ rencontre au moins un segment joignant deux points de S .)

Remarque. Des résultats plus faibles avec $cn^{-\alpha}$ à la place de $cn^{-1/3}$ pourront recevoir des points selon la valeur de la constante $\alpha > 1/3$.