

Les fonctions « balaises »

IMO · 2025 · Australie

Soit $\mathbb{N}_{\geq 1}$ l'ensemble des entiers strictement positifs. On dit qu'une fonction $f: \mathbb{N}_{\geq 1} \rightarrow \mathbb{N}_{\geq 1}$ est *balaise* si

$$f(a) \text{ divise } b^a - f(b)^{f(a)}$$

pour tous les entiers $a \geq 1$ et $b \geq 1$.

Trouver le plus petit nombre réel c tel que $f(n) \leq cn$ pour toute fonction f balaise et tout entier $n \geq 1$.