

Recherche d'équilibre : les nombres sur le fil

Olympiade nationale · 2025

On rappelle que pour tout entier naturel non nul m :

$$1 + 2 + 3 + \cdots + m = \frac{m(m+1)}{2}$$

et, de façon plus générale, que pour tout entier naturel n et tout entier naturel non nul b :

$$(n+1) + (n+2) + (n+3) + \cdots + (n+b) = \frac{b(2n+b+1)}{2}$$

Lorsque n est un entier au moins égal à 2, on dit que n est un *nombre équilibré* si on peut trouver un entier naturel non nul b tel que :

$$1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) = (n+1) + (n+2) + \cdots + (n+b)$$

Dans ce cas, l'entier b est unique et s'appelle la *balance* de l'entier n .

Par exemple, 35 est un nombre équilibré, car :

$$1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + 34 = 595$$

et

$$(35+1) + (35+2) + \cdots + (35+14) = 595$$

La balance de 35 est égale à 14.

1. Quelques exemples

1. Montrer que 6 est un nombre équilibré et préciser sa balance.
2. Montrer que 7 n'est pas un nombre équilibré.
3. Montrer que 204 est un nombre équilibré de balance 84.

2. Lien entre nombres équilibrés et carrés parfaits

On rappelle qu'un entier naturel c est un carré parfait s'il existe un entier e tel que $c = e^2$. Ainsi, $16 = 4^2$ et $36 = 6^2$ en sont, mais pas 17 ni 18. Soit n un entier au moins égal à 2.

1. On suppose dans cette question que n est un nombre équilibré ; on note b sa balance.

Montrer que $n^2 - n = 2bn + b^2 + b$ puis que $b = \frac{-(2n+1) + \sqrt{8n^2+1}}{2}$.

En déduire que $8n^2 + 1$ est un carré parfait.

2. On suppose dans cette question que $8n^2 + 1$ est un carré parfait ; on note e l'entier $\sqrt{8n^2+1}$.

Montrer que e est impair puis que le réel b défini par $b = \frac{-(2n+1) + e}{2}$ est un entier strictement positif.

3. Conclure que n est un nombre équilibré si et seulement si $8n^2 + 1$ est un carré parfait.

3. Une fonction génératrice

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = 3x + \sqrt{8x^2 + 1}$$

1. Vérifier que pour tout réel x , on a : $8(f(x))^2 + 1 = (8x + 3\sqrt{8x^2 + 1})^2$
2. En déduire que si n est un nombre équilibré, alors $f(n)$ l'est aussi.

On pose $u_1 = 6$ et, pour tout entier $k \geq 1$, $u_{k+1} = f(u_k)$.

3. Montrer que $(u_k)_{k \geq 1}$ est une suite strictement croissante de nombres équilibrés.
4. Montrer que pour tout entier $k \geq 2$, $u_{k-1} = 3u_k - \sqrt{8u_k^2 + 1}$.

On considère les fonctions g et h définies sur $]0, +\infty[$ par

$$g(x) = 3x - \sqrt{8x^2 + 1} \quad \text{et} \quad h(x) = 3\sqrt{x} - \sqrt{8x + 1}$$

5. Montrer que la fonction h est strictement croissante et en déduire que g l'est aussi.

On souhaite montrer que tout nombre équilibré est de la forme u_k pour un certain entier $k \geq 1$. On raisonne par l'absurde en supposant qu'il existe au moins un nombre équilibré qui n'est pas de cette forme. On note alors n le plus petit d'entre eux.

6. Calculer u_2 . En admettant que les seuls nombres équilibrés strictement inférieurs à 36 sont 6 et 35 (ce qu'il serait toujours possible de tester « à la main »), en déduire que $n > u_2$ puis qu'il existe un entier $m \geq 2$ tel que $u_m < n < u_{m+1}$. Conclure.

4. Tester en langage Python si un nombre est équilibré ou non

1. Établir que, pour tout entier $k \geq 2$, on a : $u_{k+1} = 6u_k - u_{k-1}$
2. On considère la fonction `mystere` suivante, qui prend pour argument un entier `n` au moins égal à 2.

```
def mystere(n):
    s=1
    i=2
    while i<n:
        s=s+i
        i=i+1
    return s
```

Expliquer ce que calcule `mystere(n)`.

3. Écrire une fonction `équilibre(n)` prenant en argument un entier n au moins égal à 2 et renvoyant `True` s'il s'agit d'un nombre équilibré et `False` sinon (on pourra utiliser au choix la question 4.a ou la question 4.b. en expliquant toutefois quelle méthode est vraisemblablement la plus rapide pour l'ordinateur).

5. Générer en langage Python des nombres équilibrés

Écrire une fonction `liste_équilibres` prenant en argument un entier `n` au moins égal à 2 et renvoyant la liste des entiers équilibrés strictement inférieurs à `n`. On rappelle que `[]` est la liste vide et que, étant donnés une liste `L` et un entier `i`, la commande `L.append(i)` ajoute l'élément `i` à la liste `L` en le plaçant à la fin.