Recherche d'équilibre : les nombres sur le fil (variante)

Olympiade nationale · 2025

1. **Une formule bien utile pour la suite.**

   En additionnant la somme $S = 1 + 2 + 3$ à elle-même, mais prise en ordre inverse, soit $S = 3 + 2 + 1$, et en posant l'opération comme suit,

$$\begin{array}{rccccc} & 1 & + & 2 & + & 3 \\ & 3 & + & 2 & + & 1 \\ \hline = & 4 & + & 4 & + & 4 \end{array}$$

   on calcule $S + S = 3 \times 4$ et donc $S = 6$.

   Plus généralement, prouver de cette manière que pour tout entier naturel non nul m :

$$1 + 2 + 3 + \cdots + m = \frac{m(m+1)}{2}$$

2. En déduire que, pour tout entier naturel n et tout entier naturel non nul b :

$$(n+1) + (n+2) + (n+3) + \cdots + (n+b) = \frac{b(2n+b+1)}{2}$$

   Lorsque n est un entier au moins égal à 2, on dit que n est un *nombre équilibré* si on peut trouver un entier b naturel non nul tel que

$$1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) = (n+1) + (n+2) + \cdots + (n+b)$$

   Dans ce cas, l'entier b est unique et s'appelle la *balance* de l'entier n.

   Par exemple, 35 est un nombre équilibré, car :

$$1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + 34 = 595$$

   et

$$(35+1) + (35+2) + \cdots + (35+14) = 595$$

   La balance de 35 est égale à 14.

3. **Quelques exemples**
   (a) Montrer que 6 est un nombre équilibré et préciser sa balance.
   (b) Montrer que 7 n'est pas un nombre équilibré.
   (c) Montrer que 204 est un nombre équilibré de balance 84.

4. **Lien entre nombres équilibrés et carrés parfaits.** On rappelle qu'un entier naturel c est un carré parfait s'il existe un entier e tel que $c = e^2$. Ainsi, $16 = 4^2$ et $36 = 6^2$ en sont, mais pas 17 ni 18. Soit n un entier au moins égal à 2.
   (a) On suppose dans cette question que n est un nombre équilibré ; on note b sa balance.

   Montrer que $n^2 - n = 2bn + b^2 + b$ puis que $8n^2 + 1 = (2n + 2b + 1)^2$.
   (b) On suppose dans cette question que $8n^2 + 1$ est un carré parfait ; on note e l'entier $\sqrt{8n^2+1}$.

   Montrer que e est impair puis que le réel b défini par $b = \dfrac{-(2n+1)+e}{2}$ est un entier strictement positif.
   (c) Conclure que n est un nombre équilibré si et seulement si $8n^2 + 1$ est un carré parfait.

5. **Une fonction génératrice.** On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = 3x + \sqrt{8x^2 + 1}$$

   (a) Vérifier que pour tout réel x, on a :

$$8(f(x))^2 + 1 = (8x + 3\sqrt{8x^2 + 1})^2$$

   (b) En déduire que si n est un nombre équilibré, alors $f(n)$ l'est aussi.

   On pose $u_1 = 6$ et, pour tout entier $k \geqslant 1$, $u_{k+1} = f(u_k)$.

   (c) Montrer que $(u_k)_{k\geqslant 1}$ est une suite strictement croissante de nombres équilibrés.

6. **Générer en langage Python des nombres équilibrés.**

   Écrire une fonction `liste_equilibres(n)` prenant en argument un entier `n` au moins égal à 2 et renvoyant la liste `[u_1, u_2, ..., u_n]`. On rappelle que `[ ]` est la liste vide et que, étant donnés une liste `L` et un entier `i`, la commande `L.append(i)` ajoute l'élément `i` à la liste `L` en le plaçant à la fin. On utilisera l'instruction `sqrt()` pour coder la fonction racine carrée.