

Plus fort !

Olympiade nationale · 2026

Dans cet exercice, toutes les questions et sous-questions sont, dans une large mesure, indépendantes. Certaines montrent crescendo en difficulté. Toutes les réponses devront être argumentées.

1. Les feux de l'amour.

Si Alice n'aime pas Jordan alors Brenda n'aime pas Dan. Si Brenda aime Jordan, alors Alice n'aime pas Jordan. Si Brenda n'aime pas Jordan, alors Brenda n'aime pas Dan. Brenda aime-t-elle Dan ?

2. Retour vers le futur.

Votre oncle a 54 ans. En échangeant les chiffres des unités et des dizaines, il n'a plus que 45 ans. Cet artifice lui fait gagner 9 ans. Plus généralement, envisageons une personne ayant ab années, avec éventuellement $a = 0$ (dans l'exemple ci-dessus, $a = 5$ et $b = 4$).

- Combien d'années, au maximum, cette facétieuse personne pourrait-elle gagner grâce à ce procédé ?
- Cette personne pourrait-elle ainsi gagner exactement 30 ans ?

3. Intelligence Administrative.

4 personnes se présentent à l'élection d'un conseil. Tous les votes sont valides et exprimés. Voici les résultats obtenus : Johanna obtient $\frac{1}{4}$ des voix, Jason obtient $\frac{4}{15}$ des voix, Jasmine obtient $\frac{3}{20}$ des voix, et Julie obtient $\frac{1}{3}$ des voix. Qui l'emporte et combien pouvait-il y avoir de votants ?

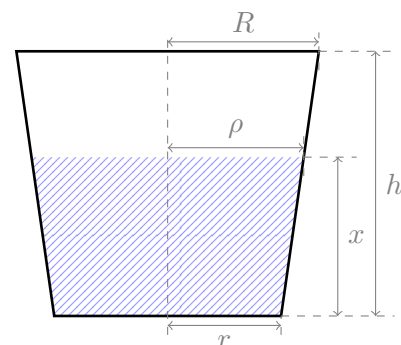
4. Une moitié de seau pas si bête.

Un seau a la forme d'un tronc de cône de petit rayon r , de grand rayon $R > r$ et de hauteur totale h .

- Justifier que son volume total vaut

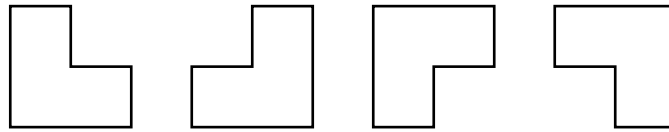
$$V = \frac{\pi h}{3}(r^2 + Rr + R^2).$$

- On remplit le seau jusqu'à la hauteur x , nombre réel appartenant à l'intervalle $[0, h]$. La surface de l'eau à cette hauteur est un disque de rayon ρ . Déterminer ρ à l'aide de x, r, R et h .
- On suppose que $r = 1$, $R = 1,2$ et $h = 2$. À l'aide de votre calculatrice, donner une valeur approchée de x de sorte que le seau soit rempli à la moitié de sa capacité.
Pourquoi pouvait-on limiter la recherche autour et au-dessus de la valeur $x = 1$?

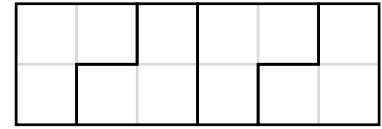


5. Triominos.

Les polygones suivants, formés de trois carrés, sont appelés *triominos* :

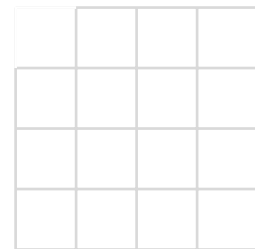


On s'intéresse au pavage par des triominos de grilles (ou, en b. et c. de morceaux de grilles) de format $a \times b$, où a désigne leur nombre de lignes et b leur nombre de colonnes. La figure ci-contre montre un exemple de pavage d'une grille dans le cas où $a = 2$ et $b = 6$.



Soit n un entier naturel non nul.

1. Est-il possible de paver une grille de format $2^n \times 2^n$?
2. On retire le carré en haut à gauche d'une telle grille (exemple ci-contre avec $n = 2$). Démontrer qu'il est alors possible de paver cette grille ainsi modifiée (on commencera par les cas $n = 1$ et $n = 2$ avant de généraliser).
3. Démontrer que le résultat précédent reste vrai quand on enlève n'importe laquelle des cases de la grille complète $2^n \times 2^n$ initiale.



6. Sommes harmoniques.

Pour n entier naturel, $n \geq 1$, on calcule la somme (dite « harmonique »)

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

Ainsi, $H_1 = 1$, $H_2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$, $H_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6}$.

1. Justifier que $H_4 = \frac{25}{12}$.
2. Proposer un code en langage Python permettant d'obtenir H_n pour tout entier naturel n avec $n \geq 1$.
3. On appelle « terme binaire » de H_n l'inverse de la plus grande puissance de deux figurant parmi ses termes à sommer. Ainsi, le terme binaire de H_2 est $\frac{1}{2}$, celui de H_3 aussi ; le terme binaire de H_8 est $\frac{1}{8}$, celui de H_9 , de H_{10} , ..., H_{15} aussi, etc. Quel est le terme binaire de H_3 ? De H_5 ? De H_{20} ?
4. On remarque, après quelques essais, que les valeurs de H_n ne semblent jamais être entières dès que $n \geq 2$. Démontrer-le à l'aide, notamment, du terme binaire de H_n .