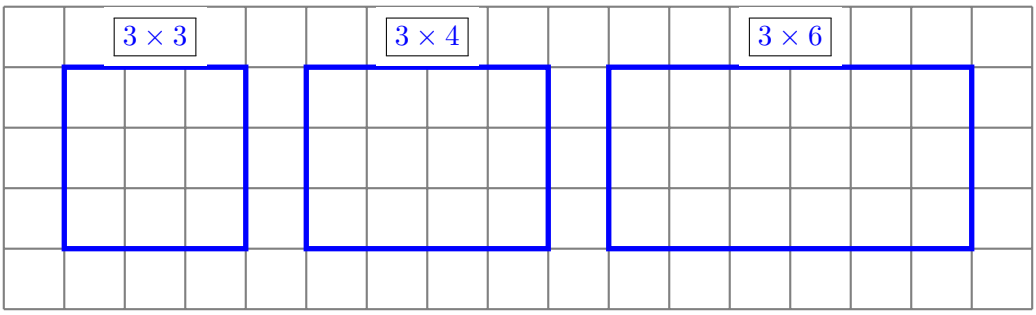
Triominos (bis)

Olympiade nationale · 2026

Pavages par des triominos

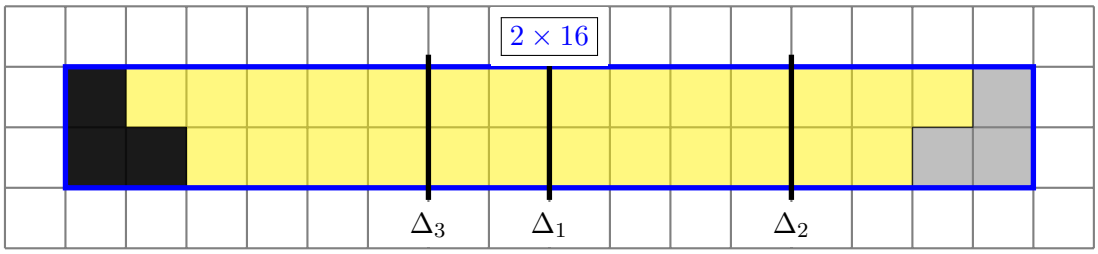
On revient ici sur les pavages par des triominos (cf. 5. de l'exercice 1) de grilles (ici, complètes) $a \times b$ rectangulaires, puis carrées, sur lesquels on se pose des questions complémentaires.

Il est recommandé de dessiner sur sa copie les grilles au stylo, mais les triominos au crayon de papier. On pourra s'aider, comme brouillon, des grilles déjà tracées figurant dans l'énoncé.

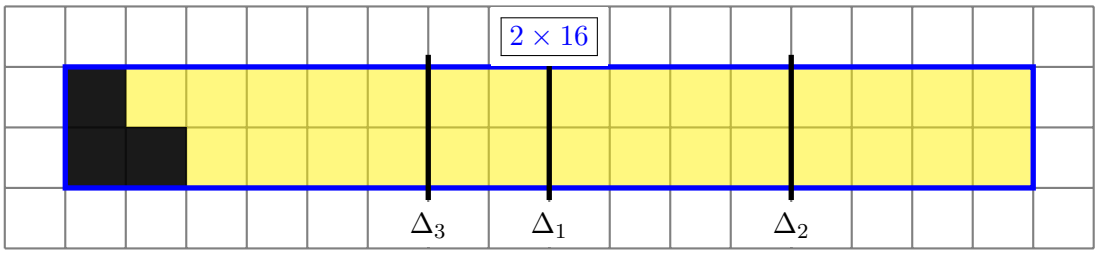


1. Représenter un pavage d'une grille dans le cas où $a = 3$ et $b = 4$.
2. (a) On suppose que l'on peut paver une grille de taille $a \times b$ (on la dit alors « pavable »). Montrer que l'entier ab est divisible par 3.
   (b) Trouver la plus petite grille carrée pavable de taille $a \times a$.
   (c) La condition « ab est divisible par 3 » est-elle suffisante pour garantir qu'une grille de taille $a \times b$ soit pavable ?
3. On suppose que $a = 2$. À quelle condition nécessaire et suffisante sur b une grille de taille $2 \times b$ est-elle pavable ?
4. Travaux manuels.

   Sur l'un des bandeaux 2×16 ci-dessous, on a symétrisé le triomino encré en noir par rapport à l'axe Δ_1, cela a donné le triomino teinté en clair à l'autre bout. On symétrise ce nouveau triomino par rapport à l'axe Δ_2, puis le nouveau-nouveau triomino par rapport à Δ_3.



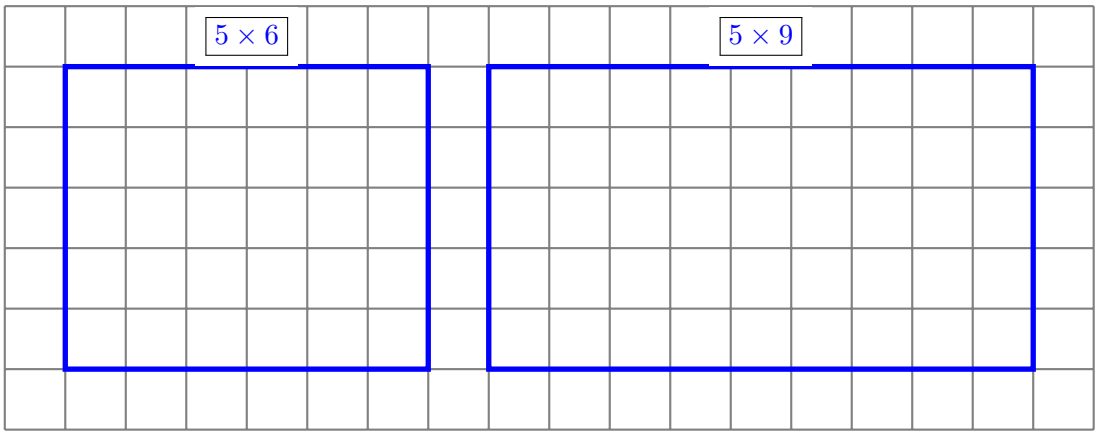
   (a) Dessiner sur votre copie à l'échelle 1/2 le bandeau et les 4 triominos (dont celui d'origine) en présence.
   (b) Découper un bandeau (à l'échelle 1) de l'énoncé, remplacer chaque symétrie par un pliage en faisant en sorte que le triomino noir soit toujours visible. Enfin découper selon ses traits. On obtient une farandole de 8 triominos identiques. Pourquoi ? *Le deuxième bandeau en fournit aussi 8.*


2×16
Δ_3
Δ_1
Δ_2

5. On suppose dans cette question que $a = 5$. On s'aidera au besoin des 16 petits triominos qu'on disposera sur les grilles ad-hoc pour ses tests au brouillon.

   (a) Représenter un pavage convenable d'une grille quand $b = 6$.

   (b) Représenter un pavage convenable d'une grille quand $b = 9$.



   (c) On suppose b divisible par 3, $b \geq 6$. Montrer que l'on peut paver une grille de taille $5 \times b$.

6. On suppose que b est divisible par 3 et que l'on peut paver une grille de taille $a \times b$. Montrer que l'on peut alors paver une grille de taille $(a + 2) \times b$.

7. On suppose que $a \geq 4$, et $b \geq 4$. Montrer que l'on peut paver une grille de taille $a \times b$ si, et seulement si, ab est divisible par 3. En déduire les grilles carrées que l'on peut paver.