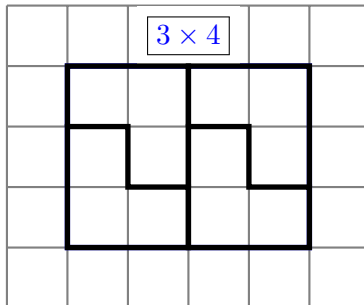


Triominos (bis)

Olympiade nationale · 2026 — Solution

1. Voici un exemple de pavage d'une grille 3×4 :

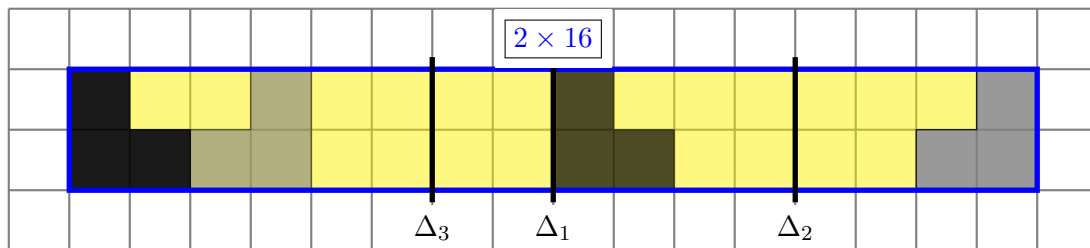


2. (a) Si une grille $a \times b$ est pavée par des triominos, alors son aire ab est la somme des aires des triominos utilisés. Chaque triomino a une aire égale à 3. On a donc $3 \mid ab$.
- (b) Une grille carrée $a \times a$ a pour aire a^2 . La condition nécessaire est $3 \mid a^2$, donc $3 \mid a$. Le plus petit candidat est donc $a = 3$.
La grille 3×3 n'est pas pavable : le triomino qui recouvre un coin est forcé, il en force un second, et il reste trois cases alignées, ce qui n'est pas un triomino en L.
Le candidat suivant est $a = 6$. Une grille 6×6 se pave en la découpant en six rectangles 2×3 , chacun étant pavable (deux triominos par rectangle).
La plus petite grille carrée pavable est donc 6×6 .
- (c) Non. La condition $3 \mid ab$ n'est pas suffisante : la grille 3×3 a bien une aire multiple de 3 mais n'est pas pavable.
3. Pour $a = 2$, la condition nécessaire est $3 \mid 2b$, donc $3 \mid b$.
Réciproquement, si $3 \mid b$, on découpe la grille $2 \times b$ en $\frac{b}{3}$ rectangles 2×3 , chacun pavable avec deux triominos.

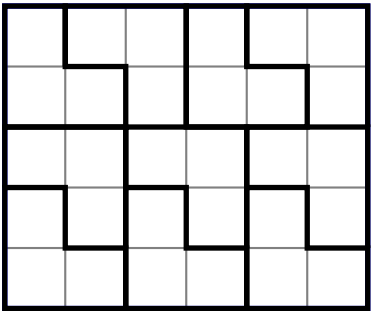
La condition nécessaire et suffisante est donc :

La grille $2 \times b$ est pavable si et seulement si $3 \mid b$.

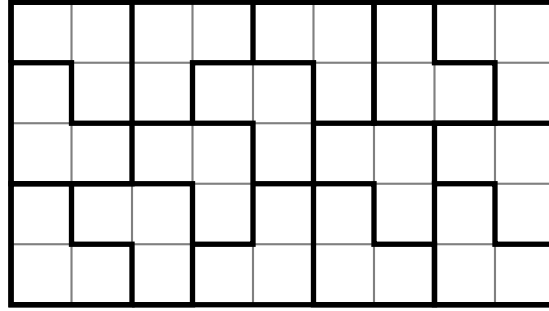
4. (a) Après les trois symétries successives, on obtient quatre triominos suivants sur le bandeau 2×16 .



- (b) Chaque pliage remplace une symétrie par une superposition. Après le premier pliage, on a 2 épaisseurs ; après le deuxième, 4 ; après le troisième, 8. Le triomino noir restant visible, le découpage selon son contour traverse donc 8 épaisseurs identiques, ce qui produit $2^3 = 8$ triominos identiques. Le deuxième bandeau fonctionne exactement de la même façon.
5. (a) Un pavage possible d'une grille 5×6 :



(b) Un pavage possible d'une grille 5×9 :



(c) Soit b un multiple de 3 avec $b \geq 6$. Alors b est de la forme $6k$ ou $6k + 3$ ($k \geq 1$).

Si $b = 6k$, on juxtapose k grilles 5×6 .

Si $b = 6k + 3$, on juxtapose $(k - 1)$ grilles 5×6 et une grille 5×9 .

Ainsi, pour tout $b \geq 6$ multiple de 3, la grille $5 \times b$ est pavable.

6. On suppose b multiple de 3 et qu'une grille $a \times b$ est pavable. D'après la question 3, une grille $2 \times b$ est également pavable. En accolant à la grille $a \times b$ une bande $2 \times b$, on obtient un pavage de la grille $(a + 2) \times b$. Donc :

$$a \times b \text{ pavable} \implies (a + 2) \times b \text{ pavable, dès que } 3 \mid b.$$

7. La nécessité a déjà été vue en 2.(a) : si la grille $a \times b$ est pavable, alors $3 \mid ab$.

Réciproquement, supposons $a \geq 4$, $b \geq 4$ et $3 \mid ab$. Par symétrie, on peut supposer $3 \mid b$ (si ce n'est pas le cas, $3 \mid a$ et on échange les rôles). Comme $b \geq 4$ et $3 \mid b$, on a en fait $b \geq 6$.

— Si a est pair, on part d'une grille $2 \times b$ (pavable d'après la question 3), puis on applique plusieurs fois la question 6 pour obtenir successivement $4 \times b$, $6 \times b$, ..., jusqu'à $a \times b$.

— Si a est impair, alors $a \geq 5$. On part d'une grille $5 \times b$ (pavable d'après la question 5.c), puis on applique plusieurs fois la question 6 pour atteindre $a \times b$.

On a donc démontré :

$$\boxed{\text{Pour } a, b \geq 4, \quad a \times b \text{ est pavable} \iff 3 \mid ab.}$$

Pour une grille carrée $a \times a$ avec $a \geq 4$, cela devient :

$$a \times a \text{ pavable} \iff 3 \mid a^2 \iff 3 \mid a.$$

En tenant compte de la question 2.(b) (la grille 3×3 n'est pas pavable), les grilles carrées pavables sont exactement :

$$\boxed{a \times a \text{ avec } a \geq 6 \text{ et } 3 \mid a.}$$