

Techniques de résolution de problèmes

**Club Olympiade Mathématiques
et Informatique de Madagascar**

Regroupement national
du 13 au 17 juillet 2026

Table des matières

0 Exemples et Contre-exemples	5
1 Récurrence	8
2 Principe Extrémal	12
2.1 Quelques principes	12
2.2 Exercices	12
2.3 Problèmes	13
3 Principe des Tiroirs	14
4 Géométrie	18
5 Théorie des nombres	21
5.1 Division euclidienne	21
5.2 PGCD et PPCM	22
5.3 Congruences	22
5.4 Partie entière	23
5.5 Problèmes	23
6 Combinatoire	24
6.1 Exemples introductifs	24
6.1.1 Les principes additif et multiplicatif	24
6.1.2 Le principe de l'arbre des choix	25
6.1.3 Le principe des codes : avec répétitions et sans répétitions	25
6.1.4 Choisir sans ordre et avec ordre	26
6.1.5 À retenir	28
6.2 Factorielle et coefficients binomiaux	28
6.2.1 Des choix successifs à la factorielle	28
6.2.2 Schéma d'ensemble	29
6.2.3 Choix ordonné de k personnes parmi n	29
6.2.4 Petit schéma de compréhension	30
6.2.5 À retenir	30

6.2.6	Exercices	31
6.3	Inclusion–Exclusion	33
6.3.1	Deux ensembles	33
6.3.2	Compter par le complémentaire	34
6.3.3	Retour aux trois fokontany	34
6.3.4	Trois ensembles	35
6.3.5	Forme complémentaire	36
6.3.6	Exemple numérique	36
6.3.7	À retenir	37
6.3.8	Exercice de compréhension	37
6.3.9	Exercice +	37
6.3.10	Exercice ++	37
6.4	Concept : les bijections	38
6.4.1	Exemple introductif : Soa, Tovo, Fara, Hery et les mots binaires	38
6.4.2	Le concept : une correspondance un-à-un pour compter	39
6.4.3	Exercices	40
6.4.4	À retenir	44
7	Invariants	45
7.1	Exemple introductif : retourner des jetons	45
7.2	Le concept d’invariant	46
7.2.1	Définition	46
7.2.2	Méthode de recherche	47
7.2.3	Une précaution importante	47
7.3	Invariants classiques	48
7.3.1	Parité et congruences	48
7.3.2	Coloriages	48
7.3.3	Sommes et sommes pondérées	49
7.3.4	Le PGCD	51
7.4	Monovariants	52
7.4.1	Définition	52
7.4.2	Exemple : l’algorithme des différences	52
7.5	À retenir	53
7.6	Exercices de compréhension	53
7.7	Exercices faciles	54
7.8	Exercices +	55
7.9	Exercices ++	56

7.10 Problèmes complexes 57

Introduction

Bienvenue dans ce recueil de méthodes et de problèmes inspirés des séances du Club Olympiade de Mathématiques de Madagascar (COMIMa).

Ce livre est destiné aux lycéens passionnés par les mathématiques olympiques. Chaque chapitre présente une technique classique, illustrée par des exemples, résumée de façon concise, et mise en pratique au travers d'exercices progressifs jusqu'aux problèmes les plus complexes.

CHAPITRE 0

Exemples et Contre-exemples

Exercice 0.1. On observe que pour quelques entiers naturels n , on a $n! < 2^n$. Peut-on dire que cette propriété est vraie pour tout n ?

Qu'en est-il de $n! < 3^n$?

Est-il vrai que $n! < 5^n$ pour tout entier naturel n ?

Exercice 0.2. La propriété

$$\frac{1}{n!} > \frac{8^n}{(2n)!}$$

est-elle vraie pour tout entier naturel n ?

Exercice 0.3. L'affirmation : "les diagonales d'un polygone sont toujours à l'intérieur du polygone" est-elle vraie ?

Exercice 0.4. Pour quelles valeurs de n a-t-on :

1.

$$\frac{1}{n} \leq 0,01$$

2.

$$0,49 \leq \frac{n+13}{2n+25} \leq 0,51$$

3.

$$2,5 \leq \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} \leq 4$$

Exercice 0.5. Considérons le polynôme $P(n) = n^2 - n + 5$.

— Vérifiez que pour les premières valeurs de n , $P(n)$ est premier.

— **Discutez** : un *grand* nombre d'exemples favorables suffirait-il à prouver que $P(n)$ est toujours premier ?

— Cherchez un entier n rendant $P(n)$ composé.

Reprendre ces questions avec $P(n) = n^2 - n + 11$, $P(n) = 2^{2^n} + 1$.

Est-il vrai que si p est un nombre premier, alors $2^p - 1$ est premier.

Exercice 0.6. On étudie la formule

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 \stackrel{?}{=} \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2.$$

- Calculez la somme pour $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ et comparez avec $\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.
- Ces quelques vérifications constituent-elles une démonstration ?
- Proposez, si possible, un **raisonnement** général (par récurrence ou par décomposition algébrique) pour prouver (ou infirmer) la formule.

Exercice 0.7. Considérons la suite définie par $a_n = n! + 1$.

- Calculez a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 . Certains de ces termes sont premiers.
- Peut-on affirmer que *tous* les termes de cette forme sont premiers ?
- Soit vous exhibez un terme qui n'est pas premier, soit vous tentez de prouver qu'ils le sont tous.

Exercice 0.8. Dans un pentagone convexe, on peut mesurer la somme de ses angles intérieurs. En traçant plusieurs pentagones à main levée, on trouve souvent approximativement 540° .

- Expliquez pourquoi on ne peut pas se contenter d'exemples tracés et mesurés pour conclure.
- Donnez un argument géométrique *global* prouvant que la valeur de la somme des angles d'un pentagone donne toujours 540° (indice : triangulez la figure).

Exercice 0.9. Dans un triangle ABC quelconque, on peut essayer de démontrer expérimentalement que les médianes se coupent en un même point G .

- Effectuez trois tracés différents d'un triangle et de ses médianes, constatez leur intersection.
- Montrez pourquoi la mesure ou l'observation graphique ne constitue pas une preuve.
- Proposez un argument géométrique global pour expliquer ce phénomène.

Exercice 0.10. Vrai ou faux, justifiez :

- " Tout entier positif pair plus grand qu'un certain seuil s'écrit comme somme de deux nombres dont l'un est multiple de 3."
- " $3^{2n} + 1$ est toujours divisible par 10."
- " Le nombre de diagonales d'un polygone à n côtés est $\frac{n(n-3)}{2}$."

Indications : Considérer d'abord le cas des polygones réguliers, convexes puis le cas général.

- " La somme de deux multiples de 4 est toujours un multiple de 8."
- " Tout quadrilatère convexe peut se paver entièrement avec un certain nombre de triangles identiques."

Exercice 0.11. Proposez vous-même un énoncé *nouveau* qui **semble** toujours vrai au vu de quelques cas, mais dont la validité générale n'est pas évidente.

- Donnez quelques exemples numériquement ou géométriquement.
- Invitez le lecteur à *soit* trouver un contre-exemple, *soit* fournir un raisonnement général.
- Concluez en rappelant l'importance de la preuve en mathématiques.

Exercice 0.12. On définit une fonction T ainsi :

$$T(n) = \begin{cases} \frac{n}{2}, & \text{si } n \text{ est pair,} \\ 3n + 1, & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

La **conjecture de Collatz** dit ceci : Pour tout entier $n > 1$, si on applique plusieurs fois T , la suite obtenue arrive toujours à 1, puis continue dans le cycle :

$$1 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow \dots$$

CHAPITRE 1

Récurrance

Quelques définitions

La suite de Fibonacci

La suite de Fibonacci est définie de manière récurrente comme suit : $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ pour $n \geq 0$.

Elle commence par 0 puis 1, et chaque terme suivant est la somme des deux termes précédents : 0, 1, 1, 2, 3, 5, ...

Les coefficients binomiaux

Les coefficients binomiaux sont définis à partir du symbole $\binom{n}{k}$, qui représente le nombre de façons de choisir k éléments parmi n éléments, sans tenir compte de l'ordre. Ils sont donnés par la formule suivante :

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \quad \text{pour } 0 \leq k \leq n.$$

Les coefficients binomiaux apparaissent naturellement dans le développement du binôme de Newton :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

Exercices (simples) sur les nombres de Fibonacci

Exercice 1.1. Démontrer la formule de Binet pour les nombres de Fibonacci :

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}}, \quad \text{où } \alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \text{ et } \beta = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$

Indication : Utiliser la relation de récurrence $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.

Exercice 1.2. Montrer que les nombres de Fibonacci peuvent être exprimés sous forme combinatoire :

$$F_n = \binom{n-1}{0} + \binom{n-2}{1} + \binom{n-3}{2} + \cdots.$$

Indication : Étudier les coefficients binomiaux et la relation avec la définition des F_n .

Exercice 1.3. Prouver que la somme des carrés des n premiers nombres de Fibonacci est donnée par la relation :

$$\sum_{i=1}^n F_i^2 = F_n F_{n+1}.$$

Indication : Utiliser une démonstration par récurrence pour valider cette identité.

Exercice 1.4. Démontrer l'identité matricielle suivante pour les nombres de Fibonacci :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Indication : Utiliser la définition de la puissance matricielle et la relation de récurrence des nombres de Fibonacci.

Quelques exercices

Exercice 1.5. Soit α un nombre réel tel que $\alpha + \frac{1}{\alpha} \in \mathbb{Z}$.

1. Vérifiez que si $\alpha = 2 + \sqrt{3}$, alors $\alpha + \frac{1}{\alpha} = 4$.
2. En supposant que, pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq n$, on a $\alpha^k + \frac{1}{\alpha^k} \in \mathbb{Z}$, montrez que cela reste vrai pour $n+1$, c'est-à-dire que $\alpha^{n+1} + \frac{1}{\alpha^{n+1}} \in \mathbb{Z}$.
3. Concluez que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\alpha^n + \frac{1}{\alpha^n} \in \mathbb{Z}$.

Exercice 1.6. Le but de cet exercice est de montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, la somme suivante est comprise entre 1 et 2 :

$$S = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{3n+1}.$$

1. Déterminer, en fonction de n , le nombre de termes de cette somme.
2. Quel est le plus petit terme de cette somme ? et le plus grand ?
3. Montrez que $1 < S < 2$.

Exercice 1.7. On veut montrer que tous les nombres de la forme 1007, 10017, 100117, ... sont divisibles par 53.

1. Écrivez un terme général a_n pour décrire cette suite de nombres.
2. Quelle est la différence entre deux termes consécutifs de cette suite ?
3. Concluez que a_n est divisible par 53 pour tout $n \geq 1$.

Exercice 1.8. Soient x_1, x_2 les racines de l'équation $x^2 + px - 1 = 0$, où p est un entier impair. On définit $y_n = x_1^n + x_2^n$ pour tout $n \geq 0$. Montrer que y_n et y_{n+1} sont des entiers premiers entre eux.

1. Calculez y_0, y_1 , puis $\text{pgcd}(y_0, y_1)$.
2. Établissez la relation $y_{n+2} = -p y_{n+1} + y_n$.
3. Dédurre que $\text{pgcd}(y_n, y_{n+1}) = 1$ pour tout $n \geq 0$.

Exercice 1.9. On considère $2n$ points donnés dans l'espace, et $n^2 + 1$ segments de droite tracés entre ces points. Montrer qu'il existe au moins un ensemble de trois points qui sont reliés deux à deux par des segments de droite.

1. Expliquez pourquoi un graphe avec $2n$ sommets et sans triangle peut avoir au maximum n^2 arêtes.
2. En déduire qu'un graphe contenant $2n$ sommets et $n^2 + 1$ arêtes doit nécessairement contenir au moins un triangle.

Quelques problèmes

Problème 1.1. Montrez que pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons $f(n) = g(n)$, où

$$f(n) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n}, \quad g(n) = \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n}.$$

Problème 1.2. Montrez que $(n+1)(n+2) \cdots 2n = 2^n \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Problème 1.3. Montrez que 3^{n+1} divise $2^{3n} + 1$ pour tout entier $n \geq 0$.

Problème 1.4. Soit $n = 2^k$. Montrez qu'il est possible de sélectionner n entiers parmi $(2n-1)$ entiers de telle sorte que leur somme soit divisible par n .

Problème 1.5. Tous les nombres de la forme 12008, 120308, 1203308, ... sont divisibles par 19.

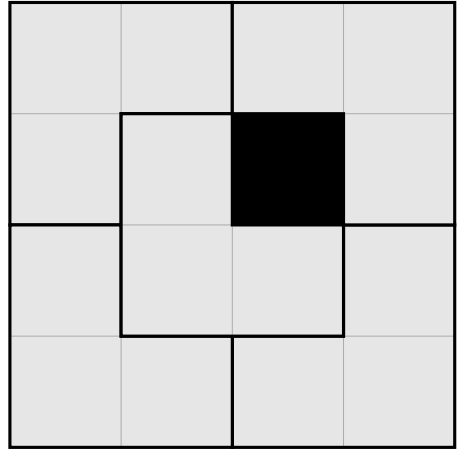
Problème 1.6. n cercles sont donnés dans le plan. Ils divisent le plan en plusieurs parties. Montrez qu'il est possible de colorier le plan avec deux couleurs de telle sorte qu'aucune partie ayant une frontière commune avec une autre ne soit coloriée de la même couleur. Une telle coloration est appelée une *coloration propre*.

Problème 1.7. Qu'est-ce qu'un tromino ?

Un **tromino** est une forme composée de trois carrés connectés par leurs côtés. Dans ce problème, nous considérons uniquement les trominos en forme de L , c'est-à-dire trois carrés formant un angle droit.

Qu'est-ce qu'un pavage ?

Un **pavage** consiste à recouvrir entièrement une surface avec des formes sans chevauchement ni espace vide. Ici, nous cherchons à recouvrir une grille carrée en utilisant uniquement des trominos.



On considère une grille carrée de taille $2^n \times 2^n$, où n est un entier positif. Un des carrés de cette grille est colorié en noir.

Question : Est-il possible de recouvrir tous les autres carrés de la grille avec des trominos en forme de L , sans chevauchement et sans laisser de case vide ?

CHAPITRE 2

Principe Extrémal

2.1 Quelques principes

1. Tout sous-ensemble fini non-vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément et un plus grand élément.
2. Tout sous-ensemble non-vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément.
3. Soit A un ensemble fini de nombres réels.
 - Si A est majoré, alors il a un plus petit majorant mais pas nécessairement un plus grand élément.
 - Si A est minoré, alors il a un plus grand minorant mais pas nécessairement un plus petit élément.

2.2 Exercices

- Exercice 2.1.** 1. Prouver qu'il n'existe pas de couple d'entiers naturels positifs (x, y) tels que : $x^2 = 2y^2$.
2. En déduire que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Exercice 2.2 — E9. Prouver qu'il n'y a pas de quadruplets d'entiers naturels positifs (x, y, a, b) tels que :

$$x^2 + y^2 = 3(a^2 + b^2).$$

Exercice 2.3 — E3. Considérons n points du plan tels que tout triplet de points forme un triangle d'aire ≤ 1 . Montrer que les n points se trouvent dans un triangle d'aire ≤ 4 .

Exercice 2.4 — E10. Considérons n points du plan qui ne sont pas tous sur une même droite. Montrez qu'il existe une droite qui passe par seulement deux de ces points.

Exercice 2.5 — E5. Soit P un ensemble de points du plan. Tout point de P est le milieu de deux points de P . Montrer que P est un ensemble infini.

2.3 Problèmes

Problème 2.1 — 12. Il y a 20 pays sur une planète. Pour chaque groupe de trois pays, il y en a deux qui n'ont aucune relation diplomatique. Montrer qu'il y a au plus 200 ambassades sur cette planète.

Problème 2.2 — 23. Prenez trois points A_1, B_1, C_1 , respectivement sur les côtés AB, BC, CA d'un triangle ABC . Montrer que si $AA_1 \leq 1$, $BB_1 \leq 1$, $CC_1 \leq 1$, alors l'aire du triangle est $\leq \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Problème 2.3 — 21. Tout polygone convexe d'aire 1 est contenu dans un rectangle d'aire 2.

Problème 2.4 — 28. On choisit 8 points dans un disque de rayon 1. Montrer qu'il y a deux points distants d'au plus 1.

Problème 2.5 — 32. Déterminer toutes les solutions positives du système d'équations :

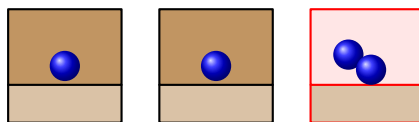
$$x_1 + x_2 = x_3^2, \quad x_2 + x_3 = x_4^2, \quad x_3 + x_4 = x_5^2, \quad x_4 + x_5 = x_1^2, \quad x_5 + x_1 = x_2^2.$$

CHAPITRE 3

Principe des Tiroirs

Le principe en quelques mots

Si vous placez $n + 1$ objets dans n tiroirs, alors au moins un tiroir contiendra plus d'un objet.



Quelques exercices simples

Exercice 3.1. Deux personnes du même sexe Parmi trois personnes, il y en a forcément deux du même sexe.

Exercice 3.2. Anniversaires Parmi 13 personnes, il y en a au moins deux qui sont nées le même mois.

Exercice 3.3. Cheveux sur la tête Personne n'a plus de 300 000 cheveux sur la tête. Une ville possède 300 001 habitants. Peut-on affirmer avec certitude qu'au moins deux personnes ont le même nombre de cheveux sur la tête ?

Exercice 3.4. Anniversaires multiples Combien de personnes doit-on réunir pour être certain que :

- Deux personnes ont le même anniversaire ?
- Trois personnes ont le même anniversaire ?
- q personnes ont le même anniversaire ?

Exercice 3.5. Perles dans des boîtes Si $qS + 1$ perles sont placées dans S boîtes, alors au moins une boîte contient plus de q perles.

Exercice 3.6. Ligne dans un triangle Une ligne ℓ dans le plan du triangle ABC ne passe par aucun sommet. Prouver qu'elle ne peut pas couper les trois côtés du triangle.

Exercice 3.7. Intersection d'un tétraèdre Un plan ne passe pas par un sommet d'un tétraèdre. Combien d'arêtes peut-il intercepter ?

Exercice 3.8. Trous sur une cible triangulaire Une cible a la forme d'un triangle équilatéral de côté 2.

- (a) Si elle est touchée 5 fois, alors il y aura deux trous avec une distance ≤ 1 .
- (b) Si elle est touchée 17 fois, quelle est la distance maximale possible entre les deux impacts les plus proches ?

Exercice 3.9. Période d'une fraction La représentation décimale de $\frac{a}{b}$, où a et b sont premiers entre eux, a une période d'au plus $b - 1$.

Exercice 3.10. Décimaux infinis Parmi 11 décimaux infinis, on peut sélectionner deux nombres a, b tels que leurs représentations décimales possèdent les mêmes chiffres à une infinité de positions correspondantes.

Exercice 3.11. Nombres à deux chiffres Parmi 12 nombres à deux chiffres distincts, on peut en sélectionner deux dont la différence est un nombre de deux chiffres de la forme aa .

Exercice 3.12. Divisibilité et coprimé Si aucun des nombres $a, a + d, \dots, a + (n - 1)d$ n'est divisible par n , alors d et n sont premiers entre eux.

Quelques exercices

Exercice 3.13. Parmi $n+1$ nombres choisis dans l'ensemble $\{1, 2, \dots, 2n\}$, il y en a au moins un qui divise un autre.

Exercice 3.14. Soient a et $b \in \mathbb{N}$ deux entiers premiers entre eux. Alors il existe des entiers naturels x et y tels que $ax - by = 1$.

Exercice 3.15. Vingt entiers positifs distincts deux à deux sont tous strictement inférieurs à 70. Montrer que parmi leurs différences deux à deux, il existe au moins quatre valeurs égales.

Exercice 3.16. Soit $P_1, P_2, \dots, P_9$ neuf points de l'espace à coordonnées entières, tels que jamais trois d'entre eux ne soient alignés. Prouver qu'il existe un point à coordonnées entières L situé sur un segment $P_i P_k$ pour $i \neq k$.

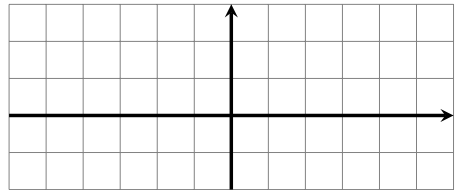
Exercice 3.17. Soit n un entier positif qui n'est divisible ni par 2 ni par 5. Montrer qu'il existe un multiple de n constitué uniquement de chiffres 1.

Exercice 3.18. Soient a, b, c et d des entiers. Montrer que le produit des différences $b - a, c - a, d - a, c - b, d - b$, et $d - c$ est divisible par 12.

Quelques problèmes simples

Problème 3.1. Cinq points dans une grille

Cinq points de la grille plane des coordonnées entières.) sont choisis. Prouvez que vous pouvez toujours en choisir deux tels que le segment reliant ces points passe par un autre point de la grille. (Les points de la grille sont ceux qui ont



Problème 3.2. Des gens dans une pièce Il y a n personnes dans une pièce. Montrez qu'il existe au moins deux personnes ayant le même nombre de connaissances dans la pièce.

Problème 3.3. Tournoi d'échecs Un joueur d'échecs a 77 jours pour se préparer à un tournoi. Il joue au moins une partie par jour, et au total pas plus de 132 parties. Montrez qu'il existe une suite de jours consécutifs pendant laquelle il joue exactement 21 parties.

Problème 3.4. Erdős et Szekeres Les entiers positifs de 1 à 101 sont écrits dans un ordre quelconque. Montrez que l'on peut supprimer 90 de ces nombres, de sorte qu'il reste une sous-suite strictement croissante ou décroissante.

Quelques problèmes

Problème 3.5. Supposons que a soit premier avec 2 et 5. Prouvez que, pour tout n , il existe une puissance de a se terminant par $\underbrace{000 \dots 01}_n$.

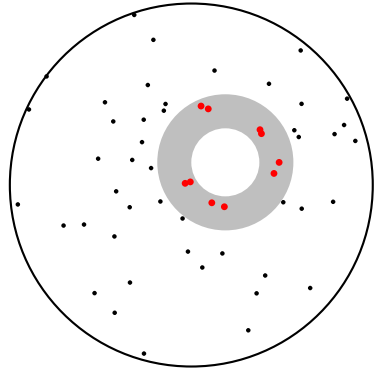
Problème 3.6. Parmi six personnes, il y en a toujours trois qui se connaissent mutuellement ou trois qui sont des étrangers complets.

Problème 3.7. Chacun des 17 scientifiques est en correspondance avec

tous les autres. Ils échangent uniquement sur trois sujets, et chaque paire de scientifiques correspond sur exactement un seul sujet. Montrer qu'il existe au moins trois scientifiques qui correspondent entre eux sur un même sujet.

Problème 3.8. Parmi dix nombres de deux chiffres distincts, on peut toujours choisir deux sous-ensembles non vides disjoints tels que la somme de leurs éléments soit la même.

Problème 3.9. On place 650 points à l'intérieur d'un cercle de rayon 16. Montrer qu'il existe une couronne (un anneau) de rayon intérieur 2 et de rayon extérieur 3 qui contient 10 de ces points.



Problème 3.10. On dispose de plusieurs cercles, d'une longueur totale égale à 10, placés à l'intérieur d'un carré de côté 1. Montrer qu'il existe une droite qui intersecte au moins quatre de ces cercles.

Problème 3.11. Une disque fermé de rayon 1 contient sept points, tels que la distance mutuelle entre tous les points est ≥ 1 . Prouvez que le centre du disque est l'un de ces sept points.

Problème 3.12. Parmi 70 entiers positifs ≤ 200 distincts, montrez que deux d'entre eux ont une différence égale à 4, 5 ou 9.

CHAPITRE 4

Géométrie

Notions utiles

Vecteur : Un vecteur est défini par une direction, un sens et une norme (sa longueur). On note $\overrightarrow{AB}$ le vecteur :

- de direction (AB) ,
- de sens allant du point A au point B ,
- de longueur AB .

Milieu d'un segment : Le milieu du segment $[AB]$ est le point M tel que $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$. Ses coordonnées sont $\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}; \dots\right)$,

Centroïde (centre de gravité) : Le centroïde d'un ensemble de points est le point moyen de ces points. Pour n points $A_1, A_2, \dots, A_n$, le centroïde S vérifie :

$$\sum_{i=1}^n \overrightarrow{SA_i} = \vec{0}.$$

Parallélogramme : Un quadrilatère dont les côtés opposés sont parallèles et de même longueur. Ses diagonales se coupent en leur milieu.

Exercices

Exercice 4.1. Les milieux d'un quadrilatère Les milieux P, Q, R, S [des côtés] de tout quadrilatère dans le plan ou dans l'espace sont les sommets d'un parallélogramme.

Indication : Utilisez les expressions vectorielles des milieux et comparez les vecteurs opposés.

Exercice 4.2. Hexagone formé par les centroïdes Soit $ABCDEF$ un hexagone quelconque, et soit $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ l'hexagone formé par les centroïdes des triangles $ABC, BCD, CDE, DEF, EFA, FAB$. Alors l'hexagone $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ a des côtés opposés parallèles et de même longueur.

Indication : Représentez les centroïdes de chaque triangle et utilisez les propriétés des vecteurs et des translations.

Exercice 4.3. Centroïde de n points Trouver le centroïde S de n points

$A_1, \dots, A_n$, défini par l'égalité suivante :

$$\sum_{i=1}^n \overrightarrow{SA_i} = \vec{0}.$$

Indication : Exprimez chaque vecteur $\overrightarrow{SA_i}$ en fonction de S et des points A_i , puis simplifiez la somme vectorielle.

Exercice 4.4. Diagonales orthogonales Les diagonales d'un quadrilatère sont orthogonales si et seulement si ses médianes ont la même longueur.

Exercice 4.5. Relation vectorielle dans l'espace Soient A, B, C, D quatre points dans l'espace. On a toujours :

$$|AB|^2 + |CD|^2 - |BC|^2 - |AD|^2 = 2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB}.$$

Exercice 4.6. Dans un triangle dont tous les angles sont aigus ABC , soit H l'orthocentre et O le centre du cercle circonscrit. Prouvez que le quadrilatère $BHOC$ est un parallélogramme si et seulement si le triangle ABC est équilatéral.

Exercice 4.7. Dans un triangle ABC , soient AD et BE deux médianes, se coupant en G . Montrez que

$$AB^2 + BC^2 + CA^2 = 3(GD^2 + GE^2) + \frac{3}{4}(AB^2 + BC^2 + CA^2).$$

Exercice 4.8. Soit ABC un triangle isocèle avec $AB = AC$. Soit O le centre de son cercle circonscrit. Montrer que la symétrie de O par rapport à la bissectrice de l'angle $\angle A$ coïncide avec le milieu de BC .

Problèmes

Problème 4.1. Relation sur les diagonales Montrer que

$$|AC|^2 + |BD|^2 = |AB|^2 + |BC|^2 + |CD|^2 + |DA|^2 \iff A + C = B + D.$$

Problème 4.2. Théorème (rectangle dans l'espace) Soient A, B, C, D quatre points dans l'espace. Prouvez le théorème suivant :

Si, pour tout point X de l'espace, on a

$$|AX|^2 + |CX|^2 = |BX|^2 + |DX|^2,$$

alors $ABCD$ est un rectangle.

Problème 4.3. Théorème d'Euler Prouvez le théorème d'Euler : Dans un quadrilatère $ABCD$ avec les médianes MN et PQ ,

$$|AC|^2 + |BD|^2 = 2(|MN|^2 + |PQ|^2).$$

Problème 4.4. Produit scalaire dans un rectangle Si M est un point et $ABCD$ un rectangle, alors

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD}.$$

Problème 4.5. Somme de vecteurs bornés Soient n vecteurs $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ tels que $|\vec{a}_i| \leq 1$. Montrer que, dans la somme

$$\vec{c} = \pm \vec{a}_1 \pm \dots \pm \vec{a}_n,$$

on peut choisir les signes de manière à ce que $|\vec{c}| \leq \sqrt{2}$.

Problème 4.6. Triangles équilatéraux et centre de gravité Les triangles OAB et $OA'B'$ sont équilatéraux et de même orientation. S est le centre de gravité du triangle $\triangle OAB$, et M et N sont les milieux respectifs de $A'B$ et AB' . Montrer que

$$\triangle SMB' \sim \triangle SNA' \quad (\text{IMO Jury 1977}).$$

Problème 4.7. Dans le triangle acutangle ABC , soit O le centre du cercle circonscrit. Montrer que les droites de hauteurs (altitudes) et les bissectrices internes s'agencent de sorte que l'hexagone formé par leur intersection est inscrit dans un cercle centré en O .

Problème 4.8. Soit ABC un triangle avec $\angle B = 2\angle C$. Sur le segment $[AB]$, on choisit un point M tel que $\angle MCB = \angle A$. Démontrer que le cercle circonscrit de AMC passe par un point fixe indépendamment du choix de M .

Problème 4.9. Un quadrilatère convexe $ABCD$ est donné. Le point P est l'intersection des diagonales AC et BD . Les cercles circonscrits des triangles ABP et CDP se coupent au point $Q \neq P$. Prouvez que la droite PQ coupe AD et BC en leurs milieux respectifs.

CHAPITRE 5

Théorie des nombres

5.1 Division euclidienne

Théorème 1. Théorème — Division euclidienne

Soient $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$. Il existe un unique couple $(q, r) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ tel que

$$a = bq + r, \quad 0 \leq r \leq |b| - 1.$$

L'entier naturel r ainsi obtenu est appelé *le reste de la division euclidienne* de a par b .

— **Divisibilité :** b divise a s'il existe un entier b tel que $a = bq$, i.e. le reste est 0.

- Exercice 5.1.**
- Trouver tous les entiers ≥ 1 tels que $\frac{n^3 + 3}{n^2 + 7}$ soit un entier.
 - Soient a et b deux entiers. Montrer qu'on a : $a - b \mid a^n - b^n$ et $a + b \mid a^n + b^n$ si n est impair.

Nombres premiers

Définition 1. Soit $p \geq 2$ un entier. Le nombre entier p est *premier* si ses seuls diviseurs positifs sont 1 et p .

Un entier $n \geq 2$ est dit *composé* (non premier) si $n = ab$ avec $a \geq 2$ et $b \geq 2$.

Fait 1. Tout entier $n \geq 2$ admet un diviseur premier.

Fait 2. Si p premier, $p \mid ab$ alors $p \mid a$ ou $p \mid b$.

Fait 3. Théorème fondamental de l'arithmétique

Tout entier supérieur ou égal à 2 peut être représenté comme produit de facteurs de nombres premiers, de manière unique.

- Exercice 5.2.**
- Montrer qu'un nombre premier supérieur à 3 est de la forme $6n \pm 1$.
 - Soient a et b deux entiers. Montrer que $a^4 + 4b^4$ n'est pas un nombre premier (pour $a, b > 1$).

5.2 PGCD et PPCM

D'après les **Fait 1**, **Fait 3** et l'un des principes extrémaux, les définitions suivantes ont un sens :

Définition 2. Soient a et b deux entiers tels que $(a, b) \neq (0, 0)$. Le plus grand des diviseurs positifs communs à a et b existe et sera noté par $\text{PGCD}(a, b)$. Tandis que le plus petit des multiples communs à a et b sera noté par $\text{PPCM}(a, b)$. En particulier, si $\text{PGCD}(a, b) = 1$, on dit dans ce cas que a et b sont premiers entre eux.

Fait 4. $\text{PGCD}(a, b) = \text{PGCD}(b, a - b) = \text{PGCD}(b, r)$ où $a = bq + r$.

Fait 5. $|ab| = \text{PGCD}(a, b) \cdot \text{PPCM}(a, b)$.

Fait 6. *Théorème de Bézout*

Soient a et b deux entiers non tous nuls. Alors, ils existent deux entiers x et y tels que $\text{PGCD}(a, b) = ax + by$.

En particulier, si a et b sont premiers entre eux si et seulement si on a : $ax + by = 1$.

Exercice 5.3. • Soient n un entier. Calculer $\text{PGCD}(5n+2, 12n+5)$ et $\text{PGCD}(9n+4, 2n-1)$.

- Soient a et b deux entiers non tous nuls. Supposons qu'ils existent trois entiers c, x et y tels que $c = ax + by$. Alors, on a : $\text{PGCD}(a, b)$ divise c .

5.3 Congruences

Définition 3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Considérons deux entiers a et b . On dit que a et b sont congrus modulo n (noté $a \equiv b \pmod{n}$) si a et b admettent le même reste après division euclidienne par n .

Fait 7. Si $\text{PGCD}(c, n) = 1$ et $ca \equiv cb \pmod{n}$, alors $a \equiv b \pmod{n}$.

Fait 8. Soit f un polynôme à coefficients dans $\mathbb{Z}$. Si $a \equiv b \pmod{n}$, alors $f(a) \equiv f(b) \pmod{n}$.

Fait 9. *Petit théorème de Fermat*

Soient a un entier et p premier, on a :

$$a^p \equiv a \pmod{p}.$$

- Exercice 5.4.** • Montrer que l'équation $15x^2 - 7y^2 = 9$ n'admet pas de solutions entières.
- Montrer qu'il n'existe pas de polynôme à coefficients entiers tel que $f(7) = 11$ et $f(11) = 13$.

5.4 Partie entière

D'après l'un des principes extrémaux, la définition suivante a un sens :

Définition 4. Soit $x \in \mathbb{R}$. le plus petit entier inférieur ou égal à x noté par $\lfloor x \rfloor$ ou $E(x)$, est appelé la partie entière de x .

Exercice 5.5. Soient x, y deux nombres réels et n un entier naturel non nul.

- Montrer : $E(x) + E(y) \leq E(x + y)$.
- Montrer : $\lfloor \lfloor x \rfloor / n \rfloor = \lfloor x / n \rfloor$.
- $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + \lfloor x + y \rfloor \leq \lfloor 2x \rfloor + \lfloor 2y \rfloor$.
- Calculer $\lfloor \sqrt{1} \rfloor + \lfloor \sqrt{2} \rfloor + \cdots + \lfloor \sqrt{2026} \rfloor$.

5.5 Problèmes

Problème 5.1 — 8. Soit $A = 3^{105} + 4^{105}$. Montrer que 7 divise A . Calculer $A \pmod{11}$ et $A \pmod{13}$.

Problème 5.2 — 17. Montrer que si p est un nombre premier, on a $p^2 \equiv 1 \pmod{24}$.

Problème 5.3 — 97. Trouver les trois derniers chiffres décimaux de 7^{9999} .

Problème 5.4 — 118. Montrer que l'équation $y^2 = x(x+1)(x+2)(x+3)$ n'admet pas de solutions entières toutes positives.

CHAPITRE 6

Combinatoire

6.1 Exemples introductifs

La combinatoire consiste à *compter sans énumérer un à un*. Les deux premiers outils sont le **principe additif** et le **principe multiplicatif**.

6.1.1 Les principes additif et multiplicatif

Principe additif. Lorsqu'un choix se fait *dans une catégorie ou dans une autre*, on additionne.

Exemple. À la sortie du lycée, Tiana peut acheter un gouter :

- un *koba* parmi 3 sortes ;
- ou un *mokary* parmi 2 sortes.

Combien de choix a-t-il ?

$$3 + 2 = 5.$$

Il y a donc $\boxed{5}$ choix possibles.

Principe multiplicatif. Lorsqu'un choix se fait en plusieurs étapes successives, on multiplie.

Exemple. Sur son chemin, il/elle peut composer son repas avec :

- un plat parmi 3 possibilités : *romazava*, *ravitoto*, *vary amin'anana* ;
- une boisson parmi 2 possibilités : eau ou jus.

Le nombre de repas possibles est

$$3 \times 2 = 6.$$

Il y a donc $\boxed{6}$ repas différents.

Première généralisation. Si une expérience se déroule en p étapes, et qu'il y a respectivement $n_1, n_2, \dots, n_p$ choix à chaque étape, alors le nombre total d'issues est

$$n_1 n_2 \cdots n_p.$$

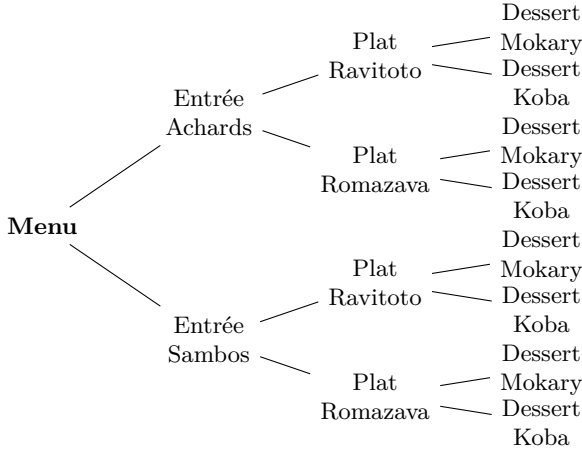
6.1.2 Le principe de l'arbre des choix

L'arbre des choix permet de visualiser un raisonnement multiplicatif.

Exemple : menu malgache. On choisit :

- une entrée : *sambos* ou *achards* ;
- un plat : *romazava* ou *ravitoto* ;
- un dessert : *koba* ou *mokary*.

Chaque menu correspond à un chemin dans l'arbre ci-dessous.



Comme il y a 2 choix pour l'entrée, 2 choix pour le plat et 2 choix pour le dessert, on obtient

$$2 \times 2 \times 2 = 8.$$

Il y a donc 8 menus possibles.

L'arbre sert surtout à *voir* les possibilités ; le calcul se fait ensuite par multiplication.

6.1.3 Le principe des codes : avec répétitions et sans répétitions

Codes avec répétition autorisée. On forme un code à 3 chiffres avec les symboles

$$0, 1, 2, 3.$$

Chaque position peut contenir n'importe lequel des 4 symboles.

Le nombre de codes est donc

$$4 \times 4 \times 4 = 4^3 = 64.$$

Il y a $\boxed{64}$ codes possibles.

Généralisation. Si un code a longueur p et si l'on dispose de n symboles, alors avec répétition autorisée, le nombre total de codes est

$$\boxed{n^p}.$$

Codes sans répétition. On reprend les symboles 0, 1, 2, 3, mais cette fois un symbole ne peut pas être utilisé deux fois.

- 4 choix pour le premier chiffre ;
- 3 choix pour le deuxième ;
- 2 choix pour le troisième.

Donc

$$4 \times 3 \times 2 = 24.$$

Il y a $\boxed{24}$ codes possibles.

Généralisation. Avec n symboles et un code de longueur p sans répétition (avec $p \leq n$), on obtient

$$\boxed{n(n-1)(n-2) \cdots (n-p+1)}.$$

Cette quantité apparaîtra plus tard sous le nom d'*arrangement*.

6.1.4 Choisir sans ordre et avec ordre

On termine par une distinction fondamentale : *l'ordre compte-t-il ou non ?*

Choix sans ordre

Exemple. Dans un *fokontany*, n habitants se portent volontaires pour représenter le quartier. On veut en choisir 2, sans attribuer de rôle particulier.

Ici, choisir $\{A, B\}$ revient au même que choisir $\{B, A\}$: **l'ordre ne compte pas**.

Si l'on comptait avec ordre, on aurait :

$$n(n-1)$$

possibilités, car :

- n choix pour la première personne ;

— $n - 1$ choix pour la deuxième.

Mais chaque paire a été comptée *deux fois* :

$$(A, B) \quad \text{et} \quad (B, A).$$

Donc le nombre de choix sans ordre est

$$\frac{n(n-1)}{2}.$$

On note souvent

$$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Exemple numérique. S'il y a $n = 5$ volontaires, alors

$$\binom{5}{2} = \frac{5 \times 4}{2} = 10.$$

Choix avec ordre

Exemple. Parmi n candidats, on veut choisir

— un *sefo fokontany* ;

— puis un adjoint.

Cette fois, les rôles sont différents : choisir A comme sefo et B comme adjoint n'est pas la même chose que choisir B comme sefo et A comme adjoint.

Le nombre de choix est donc

$$n(n-1).$$

Exemple numérique. Pour $n = 5$ candidats :

$$5 \times 4 = 20.$$

Il y a donc $\boxed{20}$ façons de choisir un sefo fokontany et un adjoint parmi 5 personnes.

6.1.5 À retenir

- **Principe additif** : si l'on choisit *ceci ou cela*, on additionne.
- **Principe multiplicatif** : si l'on choisit *ceci puis cela*, on multiplie.
- **Arbre des choix** : il permet de visualiser une situation de comptage.
- **Code avec répétition** : avec n symboles et p positions, on obtient n^p .
- **Code sans répétition** : on obtient $n(n-1) \cdots (n-p+1)$.
- **Choix sans ordre** : pour choisir 2 personnes parmi n , on obtient

$$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

- **Choix avec ordre** : pour deux rôles distincts, on obtient

$$n(n-1).$$

6.2 Factorielle et coefficients binomiaux

Dans cette section, on passe des exemples concrets aux premières formules générales de combinatoire.

6.2.1 Des choix successifs à la factorielle

Supposons que n personnes doivent se placer en file indienne.

- Il y a n choix pour la première place ;
- puis $n-1$ choix pour la deuxième ;
- puis $n-2$ choix pour la troisième ;
- etc. ;
- enfin 1 choix pour la dernière.

Le nombre total de files possibles est donc

$$n(n-1)(n-2) \cdots 2 \cdot 1.$$

On introduit alors la notation suivante :

$$n! = n(n-1)(n-2) \cdots 2 \cdot 1$$

On lit $n!$: n factorielle.

Par convention, on pose aussi

$$0! = 1.$$

Exemple 1. Avec 4 élèves, le nombre de façons de se ranger est

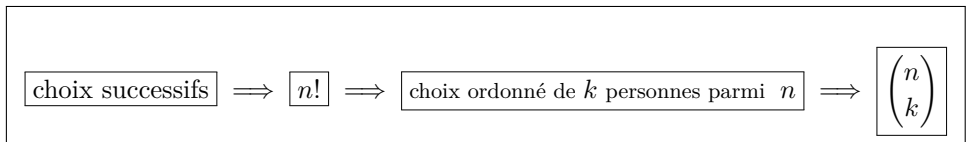
$$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24.$$

Exemple 2. Dans un *fokontany*, 5 personnes doivent occuper 5 rôles distincts (sefo, adjoint, secrétaire, trésorier, conseiller). Le nombre d'affectations possibles est

$$5! = 120.$$

6.2.2 Schéma d'ensemble

On peut résumer l'idée générale par le schéma suivant :



Autrement dit :

- quand on choisit *successivement* plusieurs personnes, on multiplie ;
- quand on choisit *toutes* les n personnes dans un ordre, on obtient $n!$;
- quand on choisit seulement k personnes dans un ordre, on obtient un produit plus court (voir ci-après) ;

6.2.3 Choix ordonné de k personnes parmi n

Supposons que n candidats soient disponibles et que l'on veuille attribuer k rôles distincts.

- n choix pour le premier rôle ;
- $n - 1$ choix pour le deuxième ;
- $n - 2$ choix pour le troisième ;
- ...
- $n - k + 1$ choix pour le k -ième rôle.

Le nombre total de choix ordonnés est donc

$$n(n-1)(n-2) \cdots (n-k+1).$$

On peut aussi l'écrire avec les factorielles :

$n(n-1) \cdots (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$

Exemple 3. Parmi 10 habitants, on veut choisir :

- un président ;
- un vice-président ;
- un secrétaire.

Le nombre de choix est

$$10 \times 9 \times 8 = 720.$$

choix ordonné de k personnes parmi $n = n(n-1) \cdots (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$

6.2.4 Petit schéma de compréhension

Voici le raisonnement à retenir :

groupe sans ordre

$\Longleftarrow$

groupe avec ordre

puis on divise par $k!$

$$\frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{k!} = \binom{n}{k}$$

On peut aussi résumer sous forme de tableau :

Situation	Ordre ?	Nombre de choix
Choisir un sefo puis un adjoint	Oui	$n(n-1)$
Choisir 2 représentants	Non	$\binom{n}{2}$
Choisir k personnes avec rôles distincts	Oui	$\frac{n!}{(n-k)!}$
Choisir k personnes sans rôle	Non	$\binom{n}{k}$

6.2.5 À retenir

—

$n! = n(n-1)(n-2) \cdots 2 \cdot 1$

compte les arrangements complets de n objets distincts.

$$\frac{n!}{(n-k)!}$$

compte les choix ordonnés de k objets parmi n .

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

compte les choix sans ordre de k objets parmi n .

— En particulier,

$$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

6.2.6 Exercices

Exercice 1. Lors d'une fête communale, n personnes sont candidates pour participer à l'organisation.

1. Combien y a-t-il de façons de choisir 4 personnes et de leur attribuer les rôles suivants : président, vice-président, secrétaire, trésorier ?
2. Combien y a-t-il de façons de choisir simplement un groupe de 4 personnes, sans rôle ?
3. Retrouver à partir de la question 1 la formule

$$\binom{n}{4} = \frac{n!}{4!(n-4)!}.$$

4. Calculer $\binom{11}{4}$.
5. Même question si l'on choisit 4 personnes parmi 11, mais que deux rôles seulement sont distincts : un président et un secrétaire, les deux autres membres n'ayant pas de rôle particulier.

Exercice 2 — Défi des fokontany. Trois fokontany, appelés A , B et C , présentent chacun 4 candidats pour organiser une fête communale. Il y a donc 12 candidats au total.

On souhaite former un comité de 5 personnes.

1. Combien de comités de 5 personnes peut-on former sans aucune contrainte ?

2. On exige désormais que chacun des trois fokontany soit représenté par au moins une personne.

Combien de comités peut-on former ?

Indication : compter tous les comités, puis retirer ceux dans lesquels l'un des fokontany n'est pas représenté.

3. Dans chaque comité satisfaisant la condition précédente, on désigne :

- un président ;
- un trésorier.

Le président et le trésorier doivent appartenir à deux fokontany différents.

Combien d'organisations différentes peut-on former ?

Indication : on pourra commencer par choisir les fokontany du président et du trésorier, puis les personnes occupant ces fonctions, et enfin les trois autres membres du comité.

4. Soa et Tovo sont deux candidats du fokontany A. À la suite d'un désaccord, ils refusent de siéger ensemble dans le même comité.

Combien de comités de 5 personnes peut-on former si :

- chacun des trois fokontany doit être représenté ;
- Soa et Tovo ne peuvent pas appartenir simultanément au comité ?

5. On impose maintenant simultanément toutes les contraintes suivantes :

- le comité contient 5 personnes ;
- chacun des trois fokontany est représenté ;
- le président et le trésorier appartiennent à deux fokontany différents ;
- Soa et Tovo ne siègent pas ensemble.

Combien d'organisations différentes peut-on former ?

Indication : partir du résultat de la question 3 et retirer les organisations interdites contenant à la fois Soa et Tovo. Pour compter ces organisations interdites, distinguer plusieurs cas selon les fonctions éventuellement occupées par Soa et Tovo.

$$Q_1 = 792$$

$$Q_2 = 624$$

$$Q_3 = 9\,600$$

$$Q_4 = 544$$

$$Q_5 = 8\,384$$

6.3 Inclusion–Exclusion

Dans plusieurs problèmes de combinatoire, il est plus simple de compter d'abord *tous les cas*, puis de retirer les cas interdits.

$\text{Nombre de cas valides} = \text{Nombre total de cas} - \text{Nombre de cas interdits}$
--

Cependant, lorsque plusieurs catégories de cas interdits se recouvrent, certains objets peuvent être retirés plusieurs fois. Il faut alors les ajouter de nouveau. C'est le principe d'**inclusion–exclusion**.

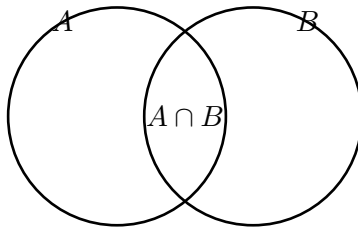
6.3.1 Deux ensembles

Soient A et B deux ensembles.

Si l'on additionne $|A|$ et $|B|$, les éléments appartenant à la fois à A et à B sont comptés deux fois.

Il faut donc retrancher une fois leur intersection :

$ A \cup B = A + B - A \cap B $



Exemple 1. Dans un lycée, 28 élèves pratiquent le football, 19 pratiquent le basket-ball et 8 pratiquent les deux sports.

Le nombre d'élèves pratiquant au moins l'un des deux sports est

$$28 + 19 - 8 = 39.$$

Ainsi,

$39 \text{ élèves pratiquent au moins un des deux sports.}$

Sans le terme -8 , les 8 élèves pratiquant les deux sports seraient comptés deux fois.

6.3.2 Compter par le complémentaire

Soit E l'ensemble de toutes les possibilités, et soit A l'ensemble des cas interdits.

Alors

$$|E \setminus A| = |E| - |A|$$

Exemple 2. On forme un code de 4 chiffres à l'aide des chiffres

$$0, 1, 2, \dots, 9.$$

Il y a au total

$$10^4$$

codes.

Les codes ne contenant aucun 7 sont au nombre de

$$9^4.$$

Le nombre de codes contenant au moins un 7 est donc

$$10^4 - 9^4 = 3439.$$

6.3.3 Retour aux trois fokontany

Trois fokontany A , B et C présentent chacun 4 candidats. On veut former un comité de 5 personnes dans lequel chaque fokontany est représenté.

Il y a au total

$$\binom{12}{5}$$

comités.

Notons :

- E_A : les comités ne contenant personne du fokontany A ;
- E_B : les comités ne contenant personne du fokontany B ;
- E_C : les comités ne contenant personne du fokontany C .

Pour chacun de ces événements, on choisit les 5 membres parmi les 8 candidats des deux autres fokontany :

$$|E_A| = |E_B| = |E_C| = \binom{8}{5}.$$

Il est impossible que deux fokontany soient simultanément absents, car il faudrait choisir 5 personnes parmi les 4 candidats du fokontany restant. Ainsi,

$$|E_A \cap E_B| = |E_A \cap E_C| = |E_B \cap E_C| = 0.$$

Le nombre de comités valides est donc

$$\boxed{\binom{12}{5} - 3\binom{8}{5} = 624.}$$

Il s'agit déjà d'une application du principe d'inclusion-exclusion.

6.3.4 Trois ensembles

Pour trois ensembles A , B et C , on commence par additionner leurs tailles :

$$|A| + |B| + |C|.$$

Tout élément appartenant exactement à deux ensembles a été compté deux fois. Un élément appartenant aux trois ensembles a été compté trois fois.

$$-|A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C|.$$

Mais les éléments de $A \cap B \cap C$ ont alors été :

- comptés trois fois au début ;
- puis retranchés trois fois.

Ils ne sont donc plus comptés du tout. Il faut les ajouter une fois.

On obtient :

$$\boxed{\begin{aligned} |A \cup B \cup C| &= |A| + |B| + |C| \\ &\quad - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| \\ &\quad + |A \cap B \cap C|. \end{aligned}}$$

Les signes alternent donc :

+ ensembles seuls - intersections de deux ensembles + intersection des trois ensembles.

6.3.5 Forme complémentaire

Si E est l'ensemble de toutes les possibilités et si A, B, C désignent trois catégories de cas interdits, alors le nombre de cas valides est

$$|E \setminus (A \cup B \cup C)|.$$

Par inclusion-exclusion,

$$\begin{aligned} |E \setminus (A \cup B \cup C)| &= |E| - |A| - |B| - |C| \\ &\quad + |A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C| \\ &\quad - |A \cap B \cap C|. \end{aligned}$$

6.3.6 Exemple numérique

Parmi les entiers de 1 à 100, combien sont divisibles par 2 ou par 5 ?
Notons :

$$A = \{\text{multiples de 2}\}, \quad B = \{\text{multiples de 5}\}.$$

On a

$$|A| = 50, \quad |B| = 20.$$

Les nombres divisibles à la fois par 2 et par 5 sont les multiples de 10 :

$$|A \cap B| = 10.$$

Ainsi,

$$|A \cup B| = 50 + 20 - 10 = 60.$$

Donc

$$60 \text{ entiers sont divisibles par 2 ou par 5.}$$

Le nombre d'entiers qui ne sont divisibles ni par 2, ni par 5, est

$$100 - 60 = 40.$$

6.3.7 À retenir

On additionne les cas simples,

on retranche les doubles intersections,

on ajoute les triples intersections, etc.

Le principe général repose sur une alternance de signes :

$+$ $-$ $+$ $-$ $\dots$

6.3.8 Exercice de compréhension

Dans une classe de 40 élèves :

- 25 élèves parlent malgache ;
- 18 élèves parlent français ;
- 10 élèves parlent les deux langues.

1. Combien d'élèves parlent au moins l'une des deux langues ?
2. Combien d'élèves ne parlent aucune de ces deux langues ?

6.3.9 Exercice +

Parmi les entiers de 1 à 200, déterminer :

1. le nombre d'entiers divisibles par 3 ;
2. le nombre d'entiers divisibles par 5 ;
3. le nombre d'entiers divisibles par 3 et par 5 ;
4. le nombre d'entiers divisibles par 3 ou par 5 ;
5. le nombre d'entiers divisibles ni par 3, ni par 5.

6.3.10 Exercice ++

Quatre fokontany présentent chacun 4 candidats. On souhaite former un comité de 6 personnes dans lequel chacun des quatre fokontany est représenté.

1. Combien de comités de 6 personnes peut-on former sans contrainte ?
2. Pour un fokontany fixé, combien de comités ne contiennent aucun de ses candidats ?

3. Pour deux fokontany fixés, combien de comités ne contiennent aucun candidat de ces deux fokontany ?
4. Montrer que le nombre de comités dans lesquels chacun des quatre fokontany est représenté est

$$\binom{16}{6} - 4\binom{12}{6} + \binom{4}{2}\binom{8}{6}.$$

6.4 Concept : les bijections

Une méthode fondamentale en combinatoire consiste à remplacer les objets que l'on souhaite compter par d'autres objets, plus simples à dénombrer.

6.4.1 Exemple introductif : Soa, Tovo, Fara, Hery et les mots binaires

On considère l'ensemble de quatre élèves

$$E = \{\text{Soa}, \text{Tovo}, \text{Fara}, \text{Hery}\}.$$

On souhaite former un comité en choisissant certains de ces élèves. Le comité peut éventuellement être vide.

On fixe l'ordre suivant :

$$(\text{Soa}, \text{Tovo}, \text{Fara}, \text{Hery}).$$

À chaque comité, on associe un mot de quatre chiffres composé de 0 et de 1 :

- on écrit 1 lorsque l'élève appartient au comité ;
- on écrit 0 lorsque l'élève n'appartient pas au comité.

Par exemple,

$$\{\text{Soa}, \text{Fara}\} \longleftrightarrow 1010.$$

Soa	Tovo	Fara	Hery
1	0	1	0

$$\{\text{Soa}, \text{Fara}\} \longleftrightarrow 1010$$

De même,

$$\{\text{Tovo, Fara, Hery}\} \longleftrightarrow 0111,$$

$$\emptyset \longleftrightarrow 0000,$$

et

$$E \longleftrightarrow 1111.$$

Chaque comité donne un unique mot binaire, et chaque mot binaire détermine un unique comité.

Comme chacune des quatre positions possède deux possibilités, 0 ou 1, le nombre de mots binaires est

$$2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^4 = 16.$$

Il existe donc également 16 comités possibles.

Plus généralement, pour un ensemble de n personnes, chaque sous-ensemble correspond à un mot binaire de longueur n . Par conséquent,

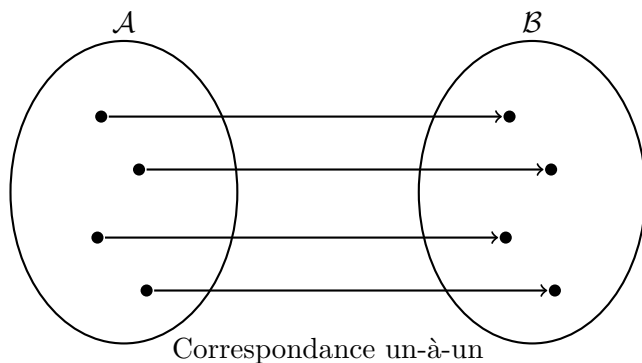
Un ensemble à n éléments possède 2^n sous-ensembles.

6.4.2 Le concept : une correspondance un-à-un pour compter

Une **bijection** entre deux ensembles $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ est une correspondance telle que :

- chaque élément de $\mathcal{A}$ correspond à un unique élément de $\mathcal{B}$;
- chaque élément de $\mathcal{B}$ correspond à un unique élément de $\mathcal{A}$.

Il s'agit donc d'une correspondance parfaite, *un objet contre un objet*.



Lorsqu'il existe une bijection entre deux ensembles finis, ces deux ensembles ont le même nombre d'éléments :

$$\boxed{\mathcal{A} \longleftrightarrow \mathcal{B} \quad \implies \quad |\mathcal{A}| = |\mathcal{B}|.}$$

La stratégie de comptage est donc la suivante :

Pour compter une famille d'objets compliqués, on construit une bijection avec une famille d'objets plus faciles à compter.

$$\boxed{\text{objets compliqués} \longleftrightarrow \text{objets simples}}$$

Dans l'exemple précédent,

$$\boxed{\text{comités formés parmi } n \text{ personnes} \longleftrightarrow \text{mots binaires de longueur } n.}$$

6.4.3 Exercices

Un premier exercice simple

On considère 7 candidats d'un fokontany :

$$\mathcal{E} = \{A, B, C, D, E, F, G\}.$$

On souhaite former un comité d'exactly 3 personnes.

À chaque comité, on associe un mot binaire de longueur 7, dans lequel 1 signifie que le candidat est choisi et 0 qu'il ne l'est pas.

Par exemple,

$$\{A, D, G\} \longleftrightarrow 1001001.$$

1. Quel comité correspond au mot

$$0110100?$$

2. Quel mot correspond au comité

$$\{B, E, F\}?$$

3. Combien de chiffres 1 possède le mot associé à un comité de 3 personnes ?

4. Montrer que les comités de 3 personnes sont en bijection avec les mots binaires de longueur 7 contenant exactement 3 chiffres égaux à 1.
5. En déduire que le nombre de comités est

$$\binom{7}{3}.$$

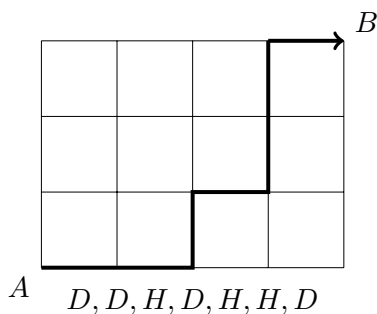
6. Généraliser : avec n candidats, combien existe-t-il de comités de k personnes ?

Chemins sur un quadrillage et coefficient binomial $\binom{p+q}{p}$

On considère un quadrillage. Pour aller du point A au point B par un chemin de longueur minimale, on est uniquement autorisé à effectuer :

- un déplacement vers la droite, noté D ;
- un déplacement vers le haut, noté H .

Voici un exemple de chemin comportant 4 déplacements vers la droite et 3 déplacements vers le haut.



À chaque chemin, on associe le mot formé par la suite de ses déplacements.

Dans l'exemple représenté,

$$\text{chemin} \longleftrightarrow DDHDHHD.$$

1. Combien de lettres D et de lettres H possède le mot associé au chemin représenté ?

2. Montrer qu'un chemin minimal de A vers B correspond à un unique mot contenant 4 lettres D et 3 lettres H .
3. Réciproquement, montrer que tout mot contenant 4 lettres D et 3 lettres H définit un unique chemin minimal.
4. En déduire que le nombre de chemins représentés sur cette grille est

$$\binom{7}{4} = \binom{7}{3}.$$

5. On considère maintenant un quadrillage nécessitant p déplacements vers la droite et q déplacements vers le haut. Montrer que les chemins minimaux sont en bijection avec les mots de longueur $p+q$ contenant exactement p lettres D .
6. En déduire que le nombre de chemins minimaux est

$$\boxed{\binom{p+q}{p} = \binom{p+q}{q}}.$$

Partitionner $2n$ personnes en n binômes

On considère $2n$ personnes distinctes. On souhaite les répartir en n binômes, sans distinguer :

- l'ordre des deux personnes à l'intérieur d'un binôme ;
- l'ordre dans lequel les binômes sont présentés.

Par exemple, avec six personnes,

$\{\text{Soa}, \text{Tovo}, \text{Fara}, \text{Hery}, \text{Mamy}, \text{Voara}\},$

une partition possible est

$\{\{\text{Soa}, \text{Tovo}\}, \{\text{Fara}, \text{Hery}\}, \{\text{Mamy}, \text{Voara}\}\}.$

Binôme 1	Binôme 2	Binôme 3
Soa Tovo	Fara Hery	Mamy Voara

On numérote maintenant les personnes de 1 à $2n$.

1. Pour $n = 2$, écrire toutes les façons de partager les quatre personnes

$$\{1, 2, 3, 4\}$$

en deux binômes.

2. Pour $n = 3$, construire quelques partitions des six personnes

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

en trois binômes.

3. À une permutation

$$(a_1, a_2, \dots, a_{2n}),$$

on associe les binômes consécutifs

$$\{a_1, a_2\}, \{a_3, a_4\}, \dots, \{a_{2n-1}, a_{2n}\}.$$

Expliquer pourquoi cette correspondance n'est pas encore une bijection.

4. Pour une partition fixée, expliquer pourquoi on peut :
 — échanger les deux personnes dans chacun des n binômes de 2^n façons ;
 — permuter les n binômes de $n!$ façons.
5. En déduire qu'une même partition est représentée par exactement

$$2^n n!$$

permutations.

6. Comme il existe $(2n)!$ permutations des $2n$ personnes, montrer que le nombre de partitions en n binômes est

$$\boxed{\frac{(2n)!}{2^n n!}}.$$

7. Vérifier que, pour six personnes, le nombre de partitions en trois binômes est

$$\frac{6!}{2^3 3!} = 15.$$

8. On appelle P_n le nombre de partitions de $2n$ personnes en n binômes. Montrer également que

$$P_n = (2n - 1)P_{n-1}.$$

9. Expliquer cette dernière formule en choisissant d'abord le partenaire de la personne numéro 1.

6.4.4 À retenir

Une bijection permet de compter une famille d'objets en la mettant en correspondance parfaite avec une autre famille dont le nombre d'éléments est déjà connu ou plus facile à déterminer.

$$\mathcal{A} \longleftrightarrow \mathcal{B} \implies |\mathcal{A}| = |\mathcal{B}|$$

CHAPITRE 7

Invariants

De nombreux problèmes d'olympiades décrivent une situation que l'on transforme en répétant une même opération. On demande alors si un certain état peut être atteint, si le processus doit s'arrêter, ou quelle sera sa configuration finale.

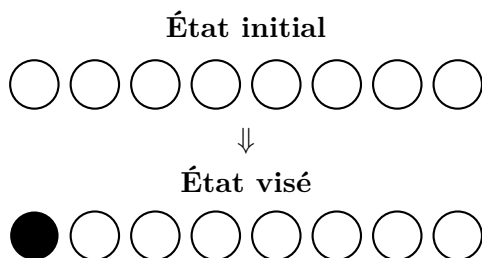
Essayer toutes les suites d'opérations est souvent impossible. L'idée consiste plutôt à chercher une propriété qui ne change jamais au cours du processus : un **invariant**.

7.1 Exemple introductif : retourner des jetons

On dispose de 8 jetons, tous placés face blanche visible.

À chaque opération, on doit retourner exactement deux jetons.

Peut-on obtenir une configuration contenant exactement un jeton noir ?



Notons N le nombre de jetons noirs.

Lorsqu'on retourne deux jetons, trois situations sont possibles :

- deux jetons blancs deviennent noirs : N augmente de 2 ;
- un jeton blanc et un jeton noir sont retournés : N ne change pas ;
- deux jetons noirs deviennent blancs : N diminue de 2.

Ainsi, à chaque opération,

$$N \longmapsto N + 2, \quad N, \quad \text{ou} \quad N - 2.$$

La parité de N ne change donc jamais.

Au départ,

$$N = 0,$$

qui est pair. Après n'importe quel nombre d'opérations, N reste pair.
Or l'état demandé contient exactement un jeton noir, donc

$$N = 1,$$

qui est impair.

L'état demandé est donc impossible à atteindre.

La parité du nombre de jetons noirs est un invariant.

7.2 Le concept d'invariant

7.2.1 Définition

Un **état** décrit complètement la situation à un instant donné.

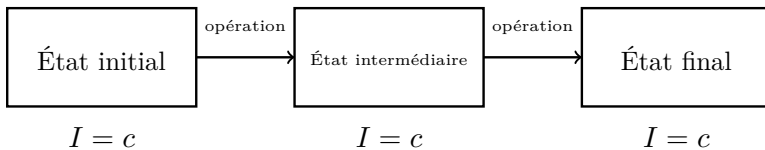
Une **opération autorisée** transforme un état en un autre.

Une quantité I est appelée un **invariant** lorsqu'elle conserve toujours la même valeur après chaque opération autorisée.

Autrement dit, si un état S est transformé en un état S' , alors

$$I(S') = I(S).$$

On peut représenter le principe ainsi :



Si l'état initial et l'état visé n'ont pas la même valeur de l'invariant, alors l'état visé est inaccessible.

$$I(\text{état initial}) \neq I(\text{état visé}) \implies \text{état visé impossible.}$$

7.2.2 Méthode de recherche

Pour résoudre un problème par invariant, on peut suivre les étapes suivantes.

1. **Décrire l'état.**

Quels nombres, couleurs, positions ou objets caractérisent la situation ?

2. **Analyser une opération.**

Quelles quantités sont modifiées ? De combien ?

3. **Chercher ce qui ne change pas.**

Il peut s'agir :

- d'une parité ;
- d'un reste modulo un entier ;
- d'une somme ;
- d'une somme pondérée ;
- d'un produit ;
- d'un PGCD ;
- du nombre d'objets d'une certaine couleur.

4. **Comparer l'état initial et l'état visé.**

Si les valeurs de l'invariant sont différentes, l'état visé est impossible.

Analyser une opération $\implies$ trouver ce qui reste constant

Comparer l'état initial et l'état final

7.2.3 Une précaution importante

Un invariant donne souvent une **condition nécessaire**, mais pas toujours une condition suffisante.

Si deux états ont des valeurs différentes de l'invariant, alors ils ne peuvent pas être reliés.

En revanche, s'ils ont la même valeur de l'invariant, cela ne prouve pas automatiquement que l'on peut passer de l'un à l'autre.

$I(S) = I(S')$ ne garantit pas toujours que S' est accessible depuis S .

Il faut parfois compléter l'étude par une construction explicite ou par un second invariant.

7.3 Invariants classiques

7.3.1 Parité et congruences

La parité est l'invariant le plus simple.

Deux entiers ont la même parité lorsqu'ils sont congrus modulo 2.

$$a \equiv b \pmod{2}$$

signifie que a et b sont tous deux pairs ou tous deux impairs.

Plus généralement, on peut étudier le reste modulo un entier m .

Exemple. Un nombre entier est initialement égal à 7.

À chaque opération, on peut :

- lui ajouter 6 ;
- ou lui retrancher 9.

Peut-on atteindre 101 ?

Les nombres 6 et 9 sont divisibles par 3. Chaque opération conserve donc le reste modulo 3.

Au départ,

$$7 \equiv 1 \pmod{3}.$$

Tous les nombres accessibles sont donc congrus à 1 modulo 3.

Mais

$$101 \equiv 2 \pmod{3}.$$

Ainsi,

Le nombre 101 ne peut pas être atteint.

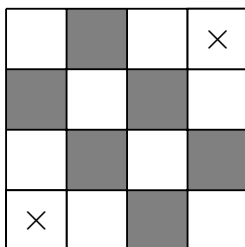
Ici, l'invariant est le reste modulo 3.

7.3.2 Coloriages

Un coloriage permet d'associer à chaque case, sommet ou position une couleur. On étudie ensuite la façon dont chaque opération agit sur les différentes couleurs.

Exemple : l'échiquier mutilé. On considère un échiquier 4×4 , dont on retire deux coins opposés.

Peut-on recouvrir les 14 cases restantes à l'aide de 7 dominos 1×2 ?



Un domino placé sur l'échiquier recouvre toujours :

- une case noire ;
- une case blanche.

Tout pavage par dominos doit donc recouvrir le même nombre de cases noires et de cases blanches.

Un échiquier 4×4 contient initialement 8 cases noires et 8 cases blanches.

Les deux coins opposés retirés ont la même couleur. Il reste donc :

6 cases d'une couleur et 8 cases de l'autre couleur.

Il est impossible que chaque domino recouvre une case de chaque couleur.

Ainsi,

L'échiquier mutilé ne peut pas être pavé par des dominos.

L'invariant est ici la différence entre le nombre de cases noires et le nombre de cases blanches recouvertes.

7.3.3 Sommes et sommes pondérées

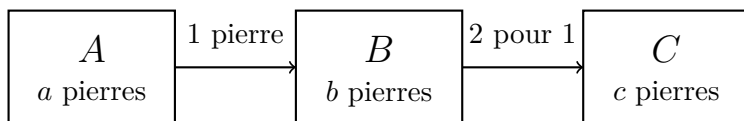
La somme totale des quantités présentes est parfois conservée.

Dans des problèmes plus délicats, la somme ordinaire varie, mais une **somme pondérée** reste constante.

Exemple : trois boîtes. Trois boîtes A , B et C contiennent respectivement a , b et c pierres.

Les opérations autorisées sont les suivantes :

- transférer une pierre de A vers B ;
- retirer deux pierres de B et placer une pierre dans C .



La somme ordinaire $a + b + c$ n'est pas conservée par la seconde opération.

Considérons plutôt

$$I = a + b + 2c.$$

Lors de la première opération,

$$(a, b, c) \mapsto (a - 1, b + 1, c),$$

donc

$$I \mapsto (a - 1) + (b + 1) + 2c = I.$$

Lors de la seconde opération,

$$(a, b, c) \mapsto (a, b - 2, c + 1),$$

donc

$$I \mapsto a + (b - 2) + 2(c + 1) = I.$$

Ainsi,

$$I = a + b + 2c$$

est un invariant.

À partir de l'état

$$(8, 0, 0),$$

on a

$$I = 8.$$

L'état

$$(0, 1, 3)$$

a pour valeur

$$I = 0 + 1 + 2 \times 3 = 7.$$

Il est donc inaccessible.

En revanche,

$$(0, 2, 3)$$

a la même valeur $I = 8$, et cet état est effectivement accessible.

7.3.4 Le PGCD

Le plus grand commun diviseur peut également rester constant.

On utilise l'identité fondamentale

$$\gcd(a, b) = \gcd(a - b, b) = \gcd(a + b, b).$$

Exemple. On part d'un couple d'entiers positifs (a, b) . Une opération permet de remplacer l'un des deux nombres par sa somme ou sa différence avec l'autre.

Le PGCD des deux nombres ne change jamais.

Ainsi, à partir de

$$(18, 30),$$

tous les couples accessibles ont pour PGCD

$$\gcd(18, 30) = 6.$$

Il est donc impossible d'atteindre le couple

$$(17, 31),$$

car

$$\gcd(17, 31) = 1.$$

7.4 Monovariants

Un invariant reste constant. Une autre idée très utile consiste à trouver une quantité qui varie toujours dans le même sens.

7.4.1 Définition

Un **monovariant** est une quantité qui :

- augmente strictement après chaque opération ;
- ou diminue strictement après chaque opération.

$$M(S') < M(S)$$

ou

$$M(S') > M(S).$$

Un monovariant permet notamment de prouver :

- qu'un processus doit s'arrêter ;
- qu'un état ne peut jamais réapparaître ;
- qu'un cycle est impossible.

7.4.2 Exemple : l'algorithme des différences

On considère deux entiers positifs a et b .

Tant qu'ils sont différents, on remplace le plus grand par la différence des deux nombres.

Par exemple,

$$(18, 30) \mapsto (18, 12) \mapsto (6, 12) \mapsto (6, 6).$$

La somme

$$M = a + b$$

diminue strictement à chaque opération.

Elle reste pourtant un entier positif. Elle ne peut donc pas diminuer indéfiniment.

Le processus doit s'arrêter.

Par ailleurs, le PGCD de a et b est invariant. Lorsque le processus s'arrête, les deux nombres sont égaux. Leur valeur commune est donc le PGCD initial.

Dans l'exemple,

$\gcd(18, 30) = 6.$

On obtient bien le couple final

$(6, 6).$

Cet exemple utilise simultanément :

un invariant : le PGCD

et

un monovariant : la somme $a + b$.

7.5 À retenir

Outil	Comportement	Utilité principale
Invariant	reste constant	prouver une impossibilité
Monovariant	augmente ou diminue	prouver la terminaison
Parité	reste modulo 2	opérations modifiant un nombre pair d'objets
Congruence	reste modulo m	déplacements par multiples de m
Coloriage	classes de couleurs	pavages et déplacements
Somme pondérée	combinaison $w_1x_1 + \dots + w_nx_n$	compensations entre opérations
PGCD	diviseurs communs	opérations par sommes et différences

Invariant différent $\implies$ état inaccessible

Monovariant borné $\implies$ le processus finit par s'arrêter

7.6 Exercices de compréhension

Exercice 1. On dispose de 20 jetons, initialement tous blancs. À chaque opération, on retourne exactement 6 jetons.

- 1. Comment varie la parité du nombre de jetons noirs ?
- 2. Peut-on obtenir exactement 5 jetons noirs ?
- 3. Peut-on obtenir exactement 8 jetons noirs ? L'invariant suffit-il à conclure ?

Exercice 2. Un entier est initialement égal à 4. À chaque opération, on peut lui ajouter 10 ou lui retrancher 15.

- 1. Quel reste modulo 5 est invariant ?
- 2. Peut-on atteindre 2026 ?
- 3. Peut-on atteindre 2024 ?

Exercice 3. Un cavalier est placé sur une case noire d'un échiquier.

1. Montrer qu'après chaque déplacement, il change de couleur de case.
2. Peut-il revenir à sa case initiale après un nombre impair de déplacements ?
3. Peut-il revenir à sa case initiale après un nombre pair de déplacements ?
L'invariant suffit-il à répondre ?

Exercice 4. Pour chacune des quantités suivantes, dire s'il s'agit plutôt d'un invariant ou d'un monovariant :

1. le PGCD dans l'algorithme des différences ;
2. la somme des deux nombres dans ce même algorithme ;
3. la parité du nombre de jetons noirs lorsqu'on retourne deux jetons ;
4. le nombre de piles lorsqu'on fusionne deux piles en une seule.

7.7 Exercices faciles

Exercice 5. Dix entiers sont initialement tous égaux à 0.

À chaque opération, on choisit exactement deux de ces entiers et on ajoute 1 à chacun d'eux.

1. Montrer que la parité du nombre d'entiers impairs est invariante.
2. Peut-on obtenir une configuration contenant exactement un entier impair ?
3. Peut-on obtenir une configuration contenant exactement deux entiers impairs ?

Exercice 6. Un échiquier 6×6 est privé de deux coins opposés.

1. Combien contient-il initialement de cases noires et de cases blanches ?
2. Les deux coins opposés ont-ils la même couleur ?
3. Peut-on paver les cases restantes avec des dominos 1×2 ?

Exercice 7. On part du couple

$$(84, 30).$$

À chaque opération, on peut remplacer l'un des nombres par la somme ou la différence positive des deux nombres.

1. Montrer que le PGCD est invariant.
2. Peut-on atteindre le couple $(15, 21)$?
3. Peut-on atteindre le couple $(12, 18)$?
4. Le PGCD suffit-il toujours à garantir qu'un couple est accessible ?

Exercice 8. Des nombres entiers sont écrits aux sommets d'un triangle.

À chaque opération, on ajoute 1 aux nombres situés à deux sommets différents.

1. Montrer que la parité de la somme des trois nombres est invariante.
2. En partant de $(0, 0, 0)$, peut-on atteindre $(1, 1, 1)$?
3. Peut-on atteindre $(1, 1, 0)$?

7.8 Exercices +

Exercice 9 — Les trois boîtes. Trois boîtes A , B et C contiennent respectivement a , b et c pierres.

Les opérations autorisées sont :

- transférer une pierre de A vers B ;
- remplacer deux pierres de B par une pierre dans C .

On part de la configuration

$$(12, 0, 0).$$

1. Montrer que $a + b + 2c$ est invariant.
2. Peut-on atteindre $(0, 1, 5)$?
3. Peut-on atteindre $(0, 2, 5)$?
4. Donner explicitement une suite d'opérations permettant d'atteindre $(0, 2, 5)$.

Exercice 10 — Pavage par carrés 2×2 . On considère un damier 6×6 .

On retire les quatre cases

$$(1, 1), \quad (1, 3), \quad (3, 1), \quad (3, 3),$$

où (i, j) désigne la case située sur la ligne i et la colonne j .

On souhaite paver les 32 cases restantes avec des carrés 2×2 .

1. Colorier les cases avec quatre couleurs selon les parités de i et de j .
2. Montrer que tout carré 2×2 recouvre exactement une case de chaque couleur.
3. Vérifier que les quatre cases retirées ont la même couleur.
4. En déduire que le pavage est impossible.

Exercice 11 — Pierres disposées en cercle. On dispose $2n$ tas de pierres sur un cercle. Leurs tailles sont

$$a_1, a_2, \dots, a_{2n}.$$

À chaque opération, on choisit deux tas voisins et on ajoute une pierre à chacun d'eux.

1. Montrer que la somme alternée

$$S = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + a_{2n-1} - a_{2n}$$

est invariante.

2. On part de

$$(1, 0, 0, \dots, 0).$$

Peut-on obtenir une configuration dans laquelle tous les tas ont la même taille ?

3. Même question si l'on part de

$$(1, 1, 0, \dots, 0).$$

L'invariant suffit-il à conclure ?

Exercice 12 — Produit invariant. Des nombres non nuls sont écrits au tableau.

Une opération consiste à changer simultanément le signe de deux nombres.

1. Montrer que le produit de tous les nombres est invariant.
2. En partant de nombres tous positifs, peut-on obtenir exactement un nombre négatif ?
3. Peut-on obtenir exactement quatre nombres négatifs ?

7.9 Exercices ++

Exercice 13 — Jetons alignés. On considère n jetons alignés, initialement tous blancs.

À chaque opération, on retourne deux jetons voisins.

1. Montrer que toute configuration accessible contient un nombre pair de jetons noirs.
2. Soient $i < j$. Montrer qu'en retournant successivement les paires

$$(i, i+1), (i+1, i+2), \dots, (j-1, j),$$

seuls les jetons situés aux positions i et j changent finalement de couleur.

3. En déduire que toute configuration contenant un nombre pair de jetons noirs est accessible.
4. Conclure qu'une configuration est accessible si et seulement si elle contient un nombre pair de jetons noirs.

Exercice 14 — Les quatre coins d'un rectangle. Une grille rectangulaire comporte m lignes et n colonnes. Toutes les cases sont initialement blanches.

Une opération consiste à choisir deux lignes et deux colonnes, puis à changer la couleur des quatre cases situées à leurs intersections.

1. Montrer que, dans chaque ligne, la parité du nombre de cases noires est invariante.
2. Montrer de même que, dans chaque colonne, cette parité est invariante.
3. En déduire que toute configuration accessible possède un nombre pair de cases noires dans chaque ligne et dans chaque colonne.
4. Réciproquement, considérer une configuration possédant cette propriété. Pour chaque case noire (i, j) , avec $i < m$ et $j < n$, effectuer l'opération sur les lignes i, m et les colonnes j, n .
5. Montrer que cette procédure permet d'effacer toutes les cases noires.
6. Conclure qu'une configuration est accessible si et seulement si chaque ligne et chaque colonne contient un nombre pair de cases noires.

Exercice 15 — Invariant et monovariant. On considère une liste finie d'entiers positifs.

À chaque opération, on choisit deux nombres distincts $a > b$ et on remplace a par $a - b$.

1. Montrer que le PGCD de tous les nombres de la liste est invariant.
2. Montrer que la somme de tous les nombres diminue strictement.
3. En déduire que le processus doit s'arrêter.
4. Décrire les configurations dans lesquelles aucune opération n'est possible.
5. Que peut-on déduire sur la valeur finale commune des nombres ?

7.10 Problèmes complexes

Problème 1 — Le taquin de quinze pièces. Un taquin est constitué de 15 pièces numérotées et d'une case vide, disposées dans une grille 4×4 .

Une opération consiste à déplacer dans la case vide une pièce voisine horizontalement ou verticalement.

On part de la configuration ordonnée

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	□

Peut-on atteindre la configuration

1	2	3	4
5	6	7	8?
9	10	11	12?
13	15	14	□

Indications :

- chaque déplacement échange la case vide et une pièce ;
- colorier la grille comme un échiquier ;
- si la case vide revient à sa position initiale, le nombre de déplacements est pair ;
- comparer la parité de la permutation des 16 objets.

Problème 2 — Une opération algébrique. Les nombres

$$x_1, x_2, \dots, x_n$$

sont écrits au tableau.

À chaque opération, on choisit deux nombres x et y , on les efface et on écrit à leur place le nombre

$$x + y - xy.$$

Après $n - 1$ opérations, il ne reste qu'un seul nombre.

1. Montrer que

$$1 - (x + y - xy) = (1 - x)(1 - y).$$

2. Trouver une quantité multiplicative qui reste invariante au cours du processus.
3. Montrer que le dernier nombre ne dépend pas de l'ordre des opérations.
4. Exprimer ce dernier nombre en fonction de $x_1, x_2, \dots, x_n$.
5. Calculer le nombre final lorsque les nombres initiaux sont

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n+1}.$$

Problème 3 — Pavage par barres de longueur 3. On considère un damier 10×10 , dont on retire la case située sur la première ligne et la deuxième colonne.

Peut-on paver les 99 cases restantes à l'aide de rectangles 1×3 , placés horizontalement ou verticalement ?

Indications :

- attribuer à la case (i, j) la couleur déterminée par

$$i + j \pmod{3};$$

- montrer que toute barre 1×3 recouvre une case de chacune des trois couleurs ;
- compter le nombre de cases de chaque couleur avant et après le retrait.

Problème 4 — Égalisation sur un cycle pair. Des entiers sont placés aux sommets d'un polygone à $2n$ sommets.

Une opération permet d'ajouter 1, ou de retrancher 1, aux nombres situés à deux sommets voisins.

1. Montrer que la somme alternée des nombres est invariante.
2. Montrer que si tous les nombres peuvent être rendus égaux, alors la somme alternée initiale est nulle.
3. Prouver réciproquement que, si la somme alternée initiale est nulle, alors il est possible de rendre tous les nombres égaux.

Indication : procéder successivement autour du polygone en corrigeant les sommets les uns après les autres.

Problème 5 — Une suite de transformations. On place les nombres

$$1, 2, 3, \dots, 2026$$

au tableau.

À chaque opération, on choisit deux nombres a et b , on les efface et on écrit leur somme $a + b$.

1. Quel invariant évident peut-on utiliser ?
2. Quel sera nécessairement le dernier nombre inscrit ?
3. Le résultat dépend-il de l'ordre des opérations ?
4. Combien d'opérations sont nécessaires ?
5. Identifier un monovariant simple.